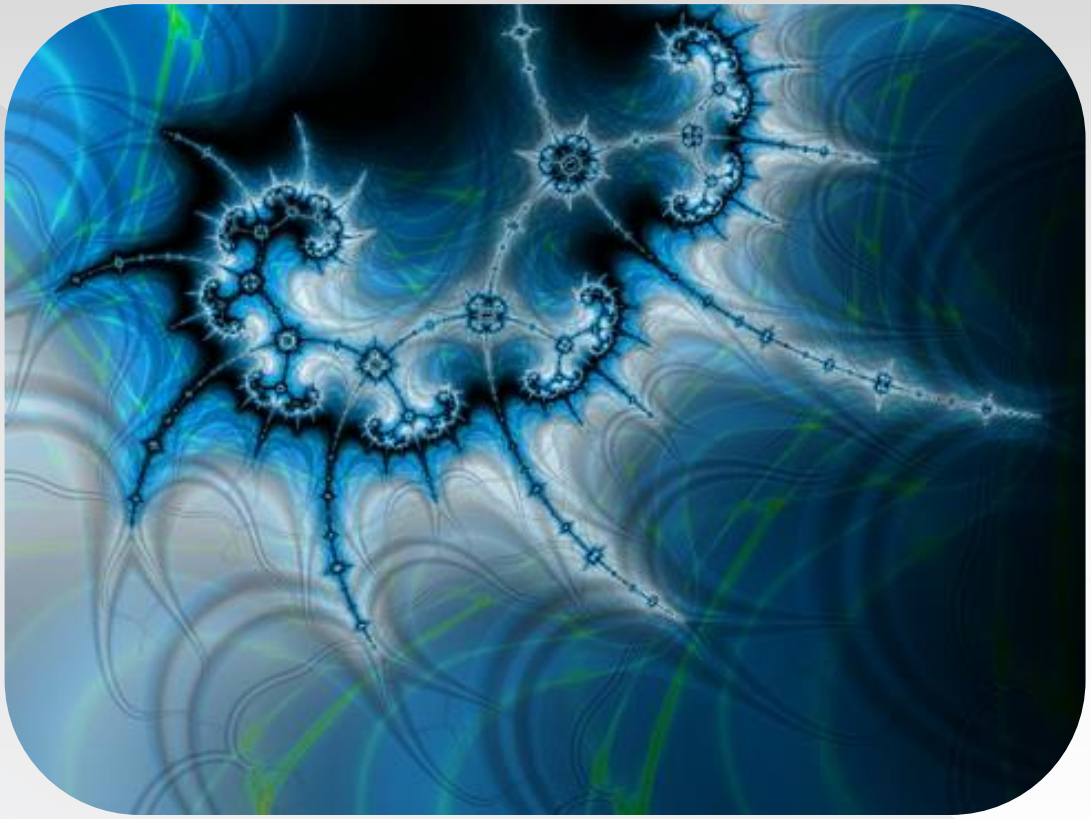
Fraktale

- „Chmury to nie kule, szczyty górskie to nie stożki, linie wybrzeża to nie koła, kora drzew nie jest gładka a błyskawice nie rozchodzą się po liniach prostych.” Jakie więc figury opisują świat? Być może są nimi fraktale.



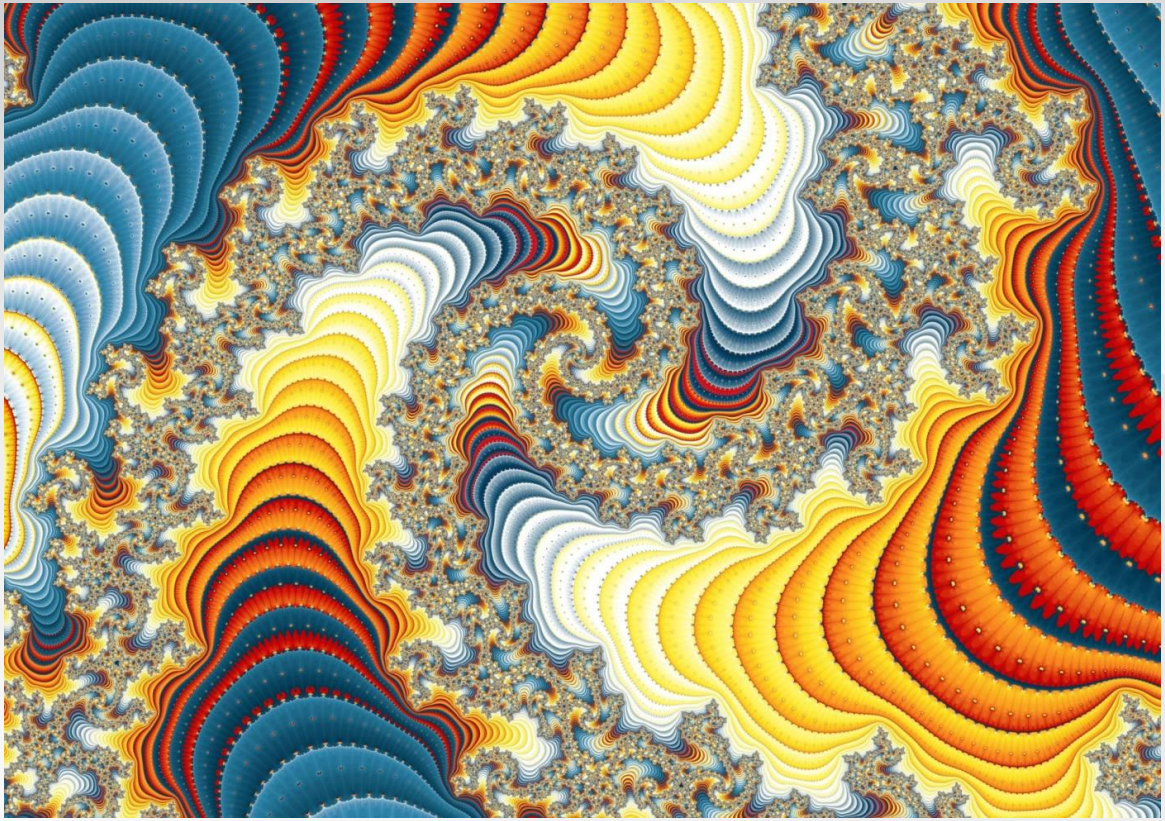
- Ogromne zainteresowanie teorią fraktali, a przez to jej dynamiczny rozwój przyczynił się do powstania Geometrii Fraktalnej.

Co to jest fraktal?

Fraktal nie ma określonej definicji (łac. *fractus* – złamany, cząstkowy), to obiekt, którego fragment w powiększeniu wygląda podobnie jak całość. Fraktale możemy dowolnie powiększać i nadal widzimy tę samą powtarzającą się strukturę.

Jak powstają fraktale?

- Fraktale geometryczne powstają w wyniku dowolnej liczby powtórzeń określonej operacji matematycznej.



- Można je otrzymać dzieląc figurę na mniejsze części, które są podobne do całości lub
- Wykorzystując komputer i równanie rekurencyjne

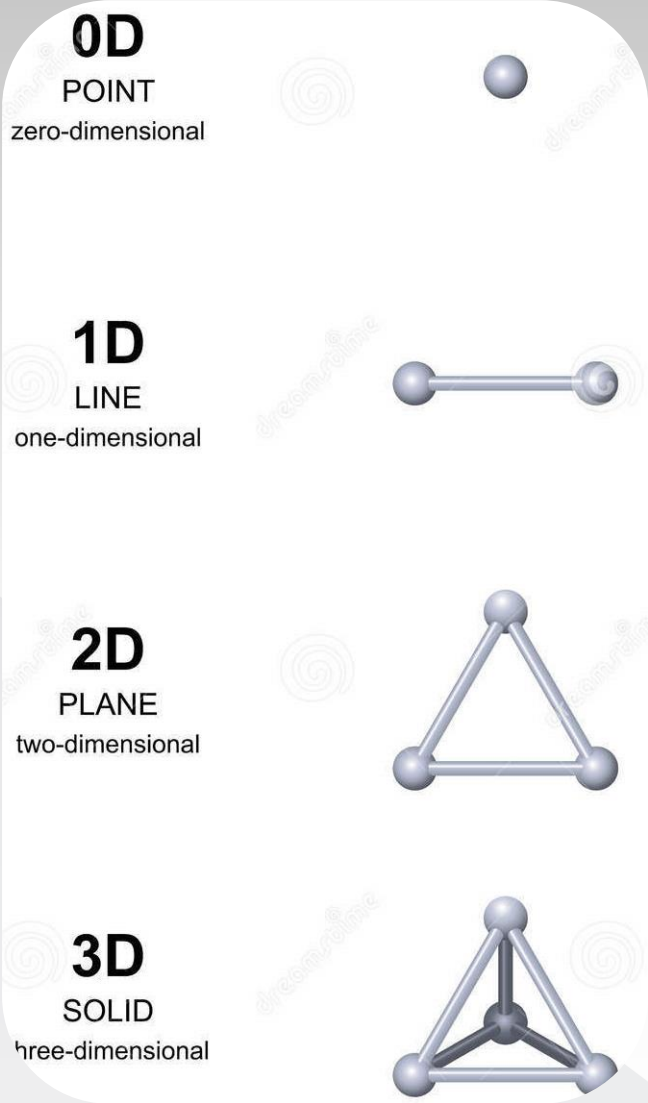
Kiedy figura jest fraktalem?

Ze względu na olbrzymią różnorodność przykładów matematycy obecnie unikają podawania ścisłej definicji i proponują określać fraktal jako zbiór, który posiada wszystkie poniższe charakterystyki albo przynajmniej ich większość:

- jest samopodobny, jeśli nie w sensie dokładnym, to przybliżonym lub stochastycznym,
- ma nietrywialną strukturę w każdej skali (dlatego np. prosta nie jest fraktalem, mimo że każdy jej kawałek jest podobny do całości). Struktura ta nie daje się łatwo opisać w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej
- jego wymiar Hausdorffa (nazywany też wymiar fraktalny lub wymiar samopodobieństwa) jest większy niż jego wymiar topologiczny

Co to wymiar topologiczny?

- **Wymiar** – minimalna liczba niezależnych parametrów potrzebnych do opisania jakiegoś zbioru. Zatem jest to liczba przypisana zbiorowi lub przestrzeni w taki sposób, by punkt miał w.=0, prosta w.=1, płaszczyzna w.=2 itd.



Wymiar fraktalny:

$$d = \frac{\log a}{\log \frac{1}{k}}$$

$$d = \frac{\ln a}{\ln \frac{1}{k}}$$

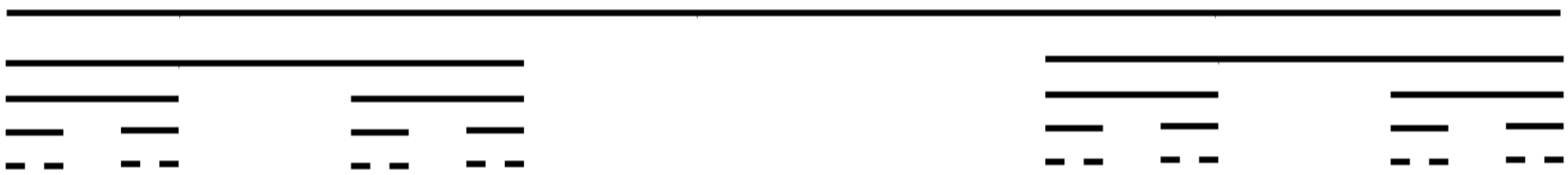
d- wymiar

a- liczba mniejszych części, z których zbudowany jest obiekt

k- skala podobieństwa do mniejszych części

$$d = \frac{\log a}{\log \frac{1}{k}}$$

Zbiór Cantora



k= 1/3 (każdy mały odcinek jest trzy razy mniejszy)

a=2 (każdy odcinek dzieli się na dwa mniejsze)

$$d = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309297\ldots$$

Wymiar topologiczny dla punktu wynosi 0.

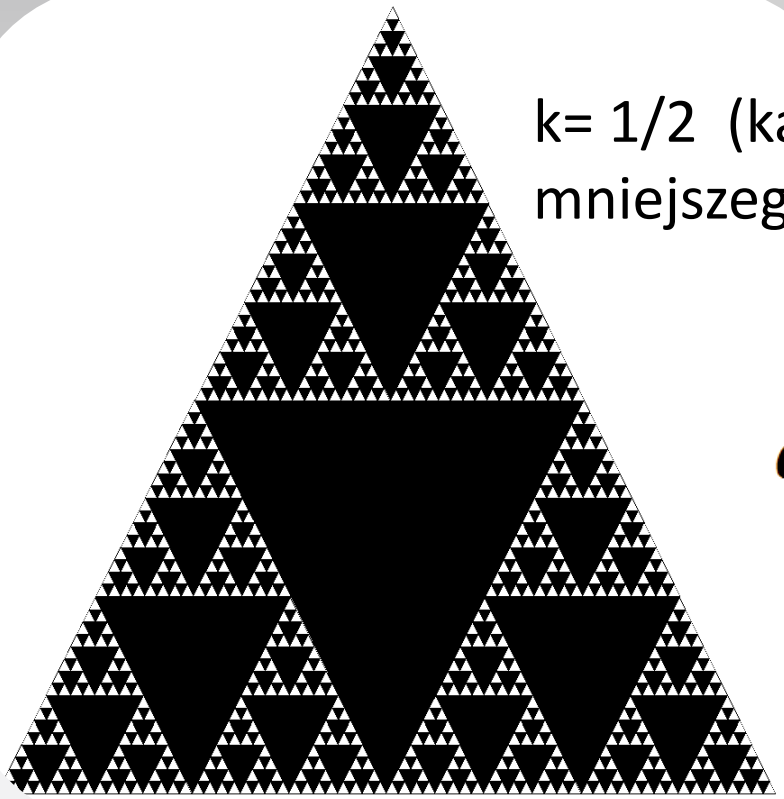
d>0

Zbiór Cantora jest fraktalem

$$d = \frac{\log a}{\log \frac{1}{k}}$$

Trójkąt Sierpińskiego

a=3 (każdy trójkąt dzieli się na trzy mniejsze)



k= 1/2 (każdy większy trójkąt jest podobny do mniejszego w skali 1/2) ??????????

$$d = \frac{\log 3}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,5849625\ldots$$

- Wymiar fraktalny (d) > wymiar topologiczny (1)

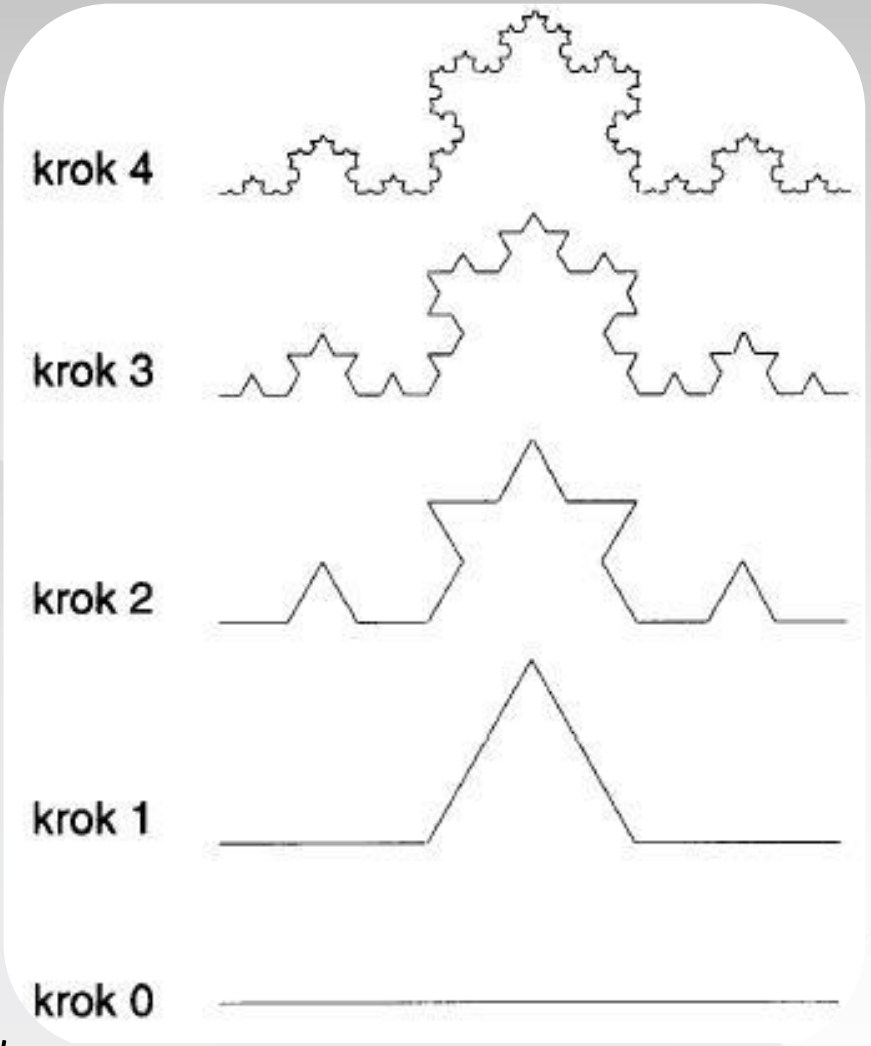
Najpopularniejsze fraktale w matematyce

Krzywa Kocha

- Jak powstaje?

rysunek ⟶

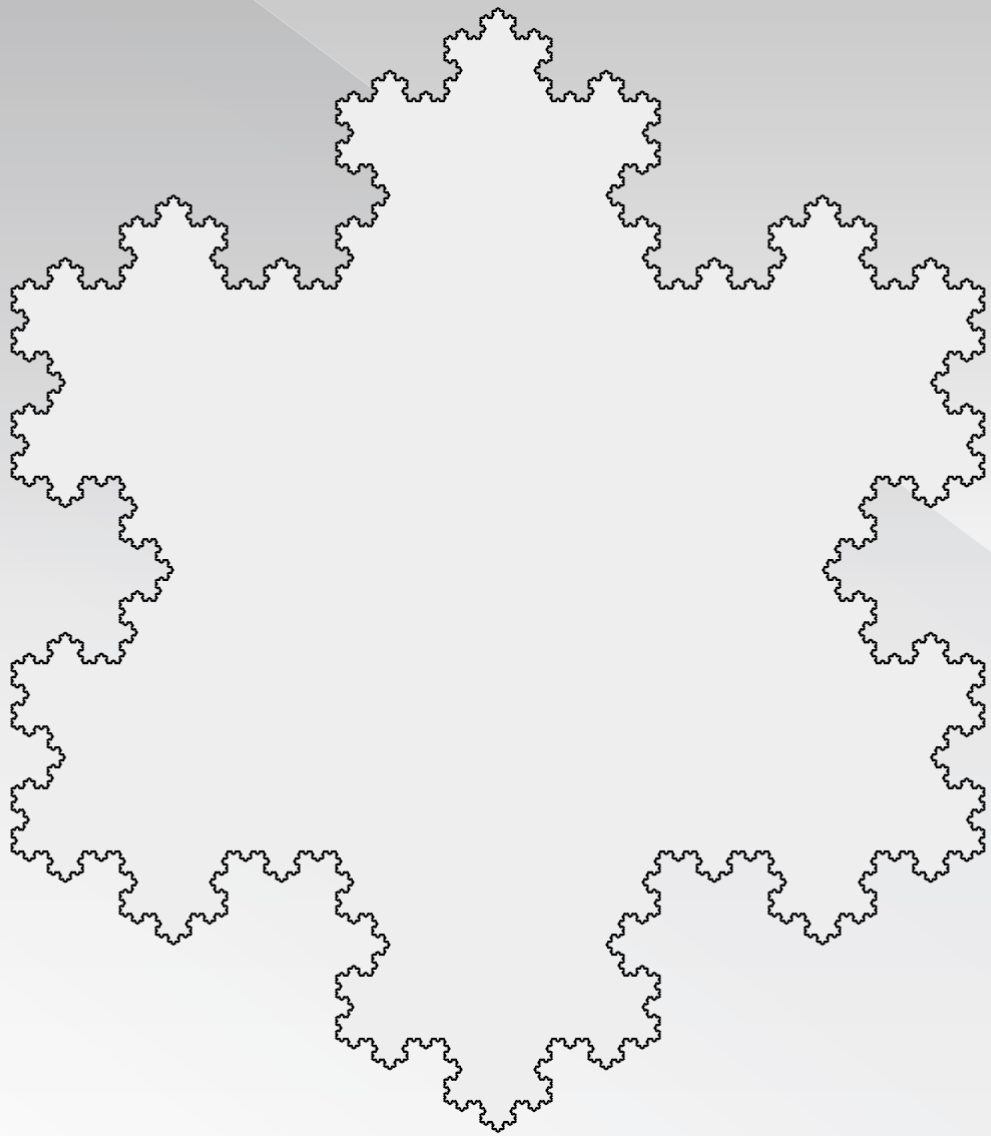
- Każdy element dzieli się na 4
- Skala podobieństwa wynosi 1/3

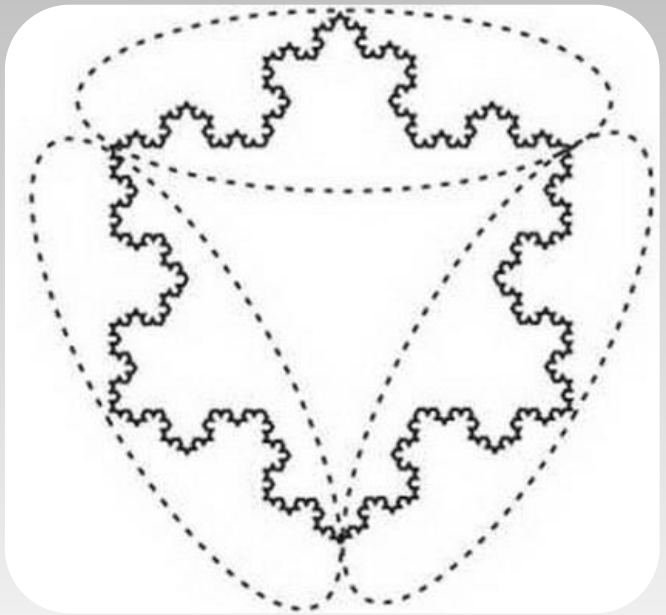


$$d = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26186$$

Krzywa ta ma nieskończoną długość

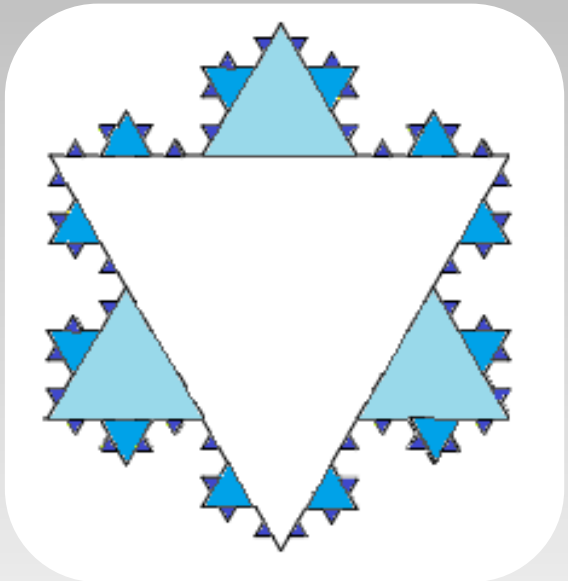
Płatek śniegu Kocha





Krzywa ma ∞ długość, ale pole płatka jest skończone i wynosi....

$$P_c = P + a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + a_4P_4 + \cdots + a_nP_n$$



P , P_1 , P_2 , P_3, … - pola coraz to mniejszych trójkątów

a_1 , a_2 , $a_{3\ldots}$ - ilość trójkątów o danym polu

x=4 (krzywa dzieli się na 4 mniejsze)

k(skala)=1/3

l= dł. boku największego trójkąta równobocznego (tego białego w środku)

$$P = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_1 = k^2P \qquad a_1 = 3$$
$$P_2 = k^2P_1 \qquad a_2 = xa_1$$
$$P_3 = k^2P_2 \qquad a_3 = xa_2$$
$$a_4 = xa_3$$

$$P_c = P + a_1P_1 + k^2xa_2P_2 + (k^2)^2x^2a_3P_3 + (k^2)^3x^3a_4P_4 + \cdots + (k^2)^{n-1}x^{n-1}a_nP_n$$

$$P_c = P + a_1P_1 + k^2xa_2P_2 + (k^2)^2x^2a_3P_3 + (k^2)^3x^3a_4P_4 + \cdots + (k^2)^{n-1}x^{n-1}a_nP_n$$

Można zauważyć szereg geometryczny, którego wyrazy należą do ciągu geometrycznego z pierwszym wyrazem $a_1 P_1$, o ilorazie q.

$$P = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

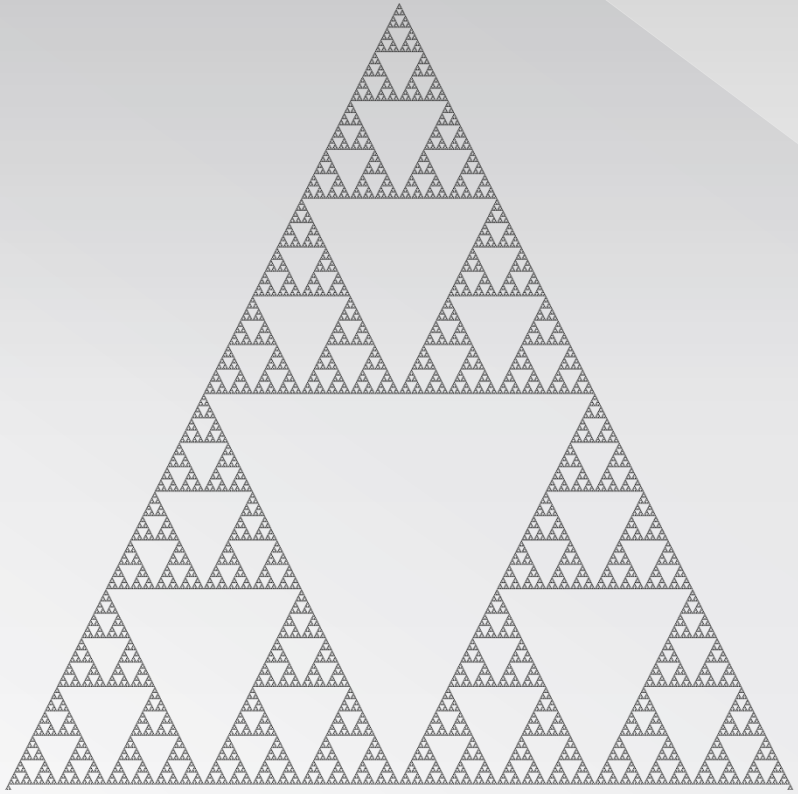
$$P_c = P + S \qquad q = k^2x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 4 = \frac{4}{9} \qquad q \in (-1, 1)$$

$$S = \frac{a_1P_1}{1-q} = \frac{3 \times \frac{1}{9}P}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{3}P}{\frac{5}{9}} = \frac{3P}{5} = \frac{3 \times \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}{5} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{20}$$

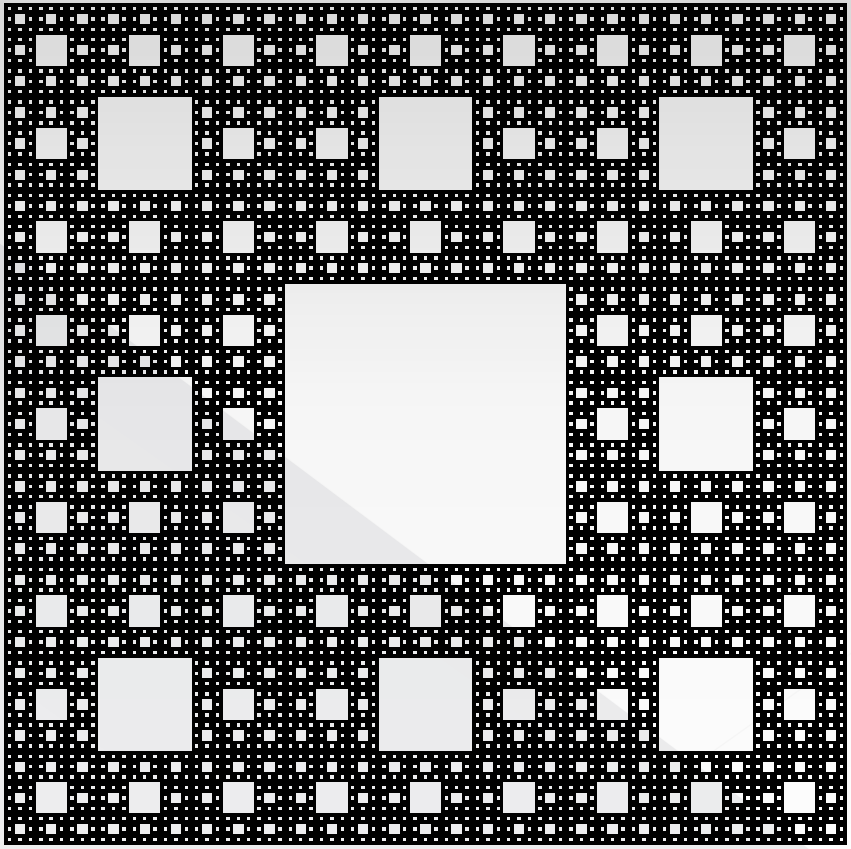
$$P_c = P + S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{20} = \frac{2l^2\sqrt{3}}{5}$$

Trójkąt i dywan Sierpińskiego

- Trójkąt Sierpińskiego



- Dywan Sierpińskiego



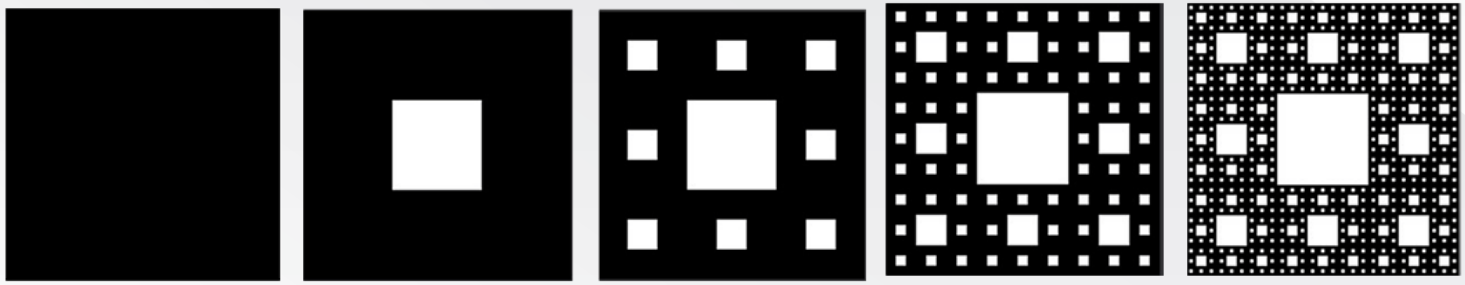
Konstrukcja

Mając na płaszczyźnie wypełniony trójkąt dzielimy go na cztery mniejsze. Następnie usuwamy środkowy, a pozostałe dzielimy w identyczny sposób.

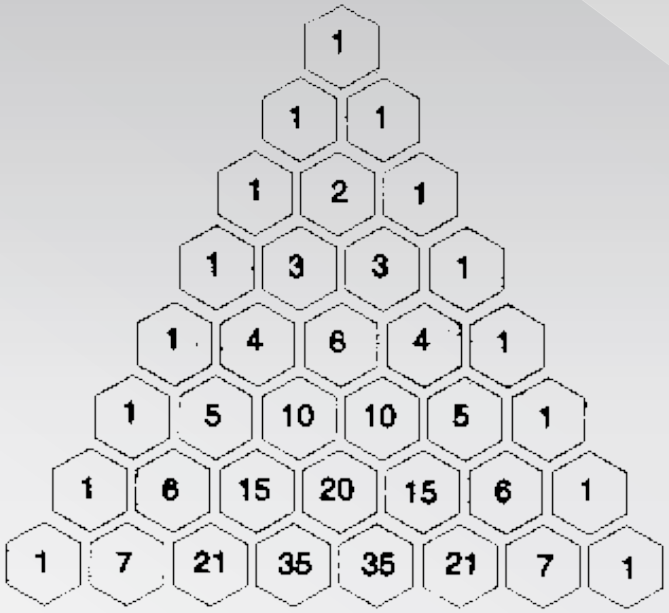
- Trójkąt Sierpińskiego

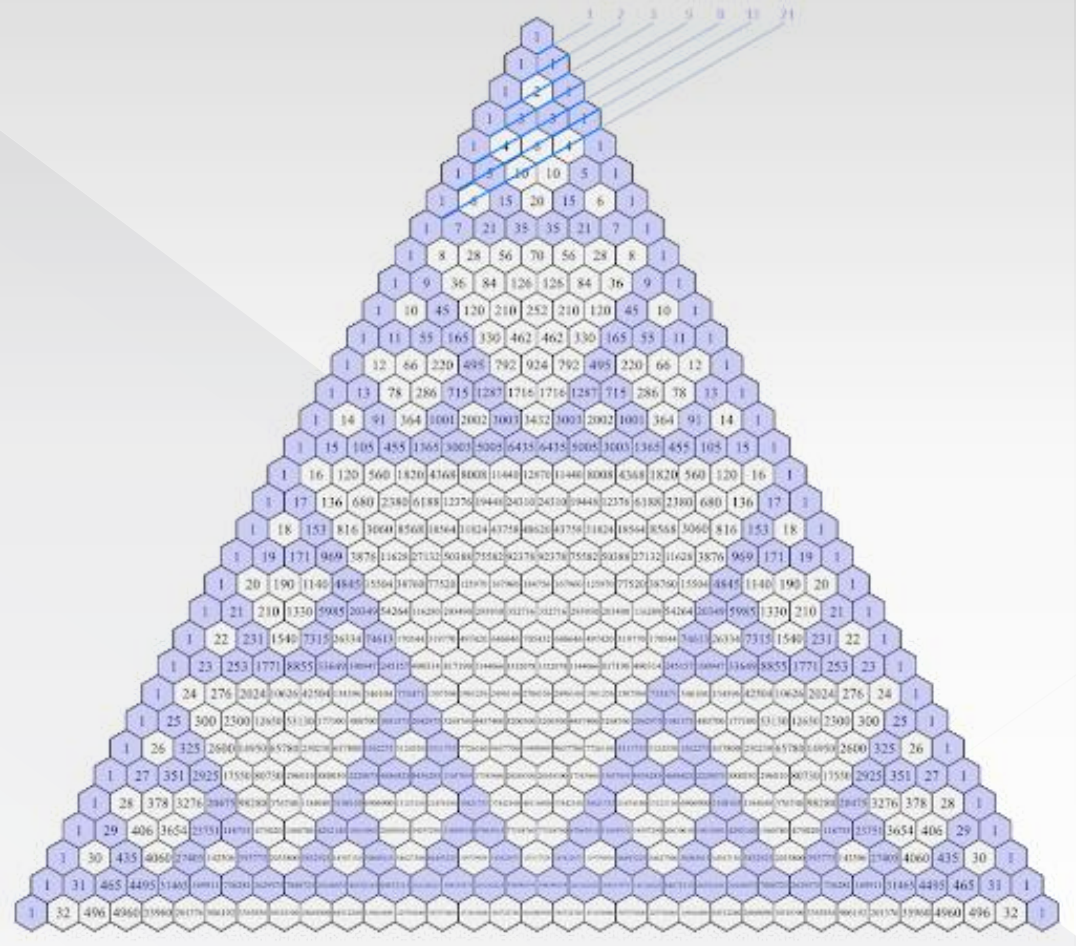
Na tej samej zasadzie można otrzymać dywan

- Dywan Sierpińskiego



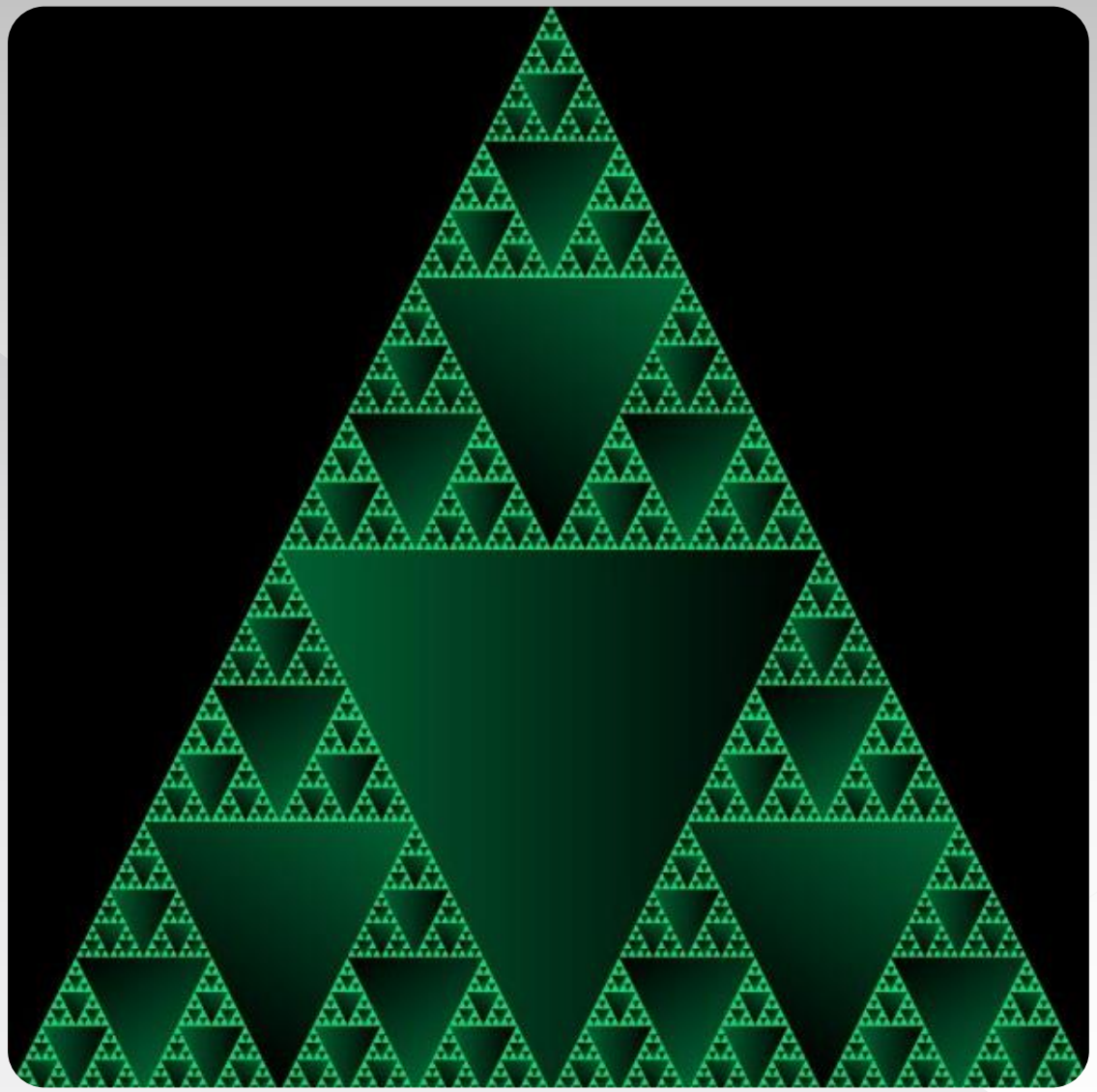
- Trójkąt Sierpińskiego można też otrzymać kolorując w trójkącie Pascala obszary z liczbami nieparzystymi.



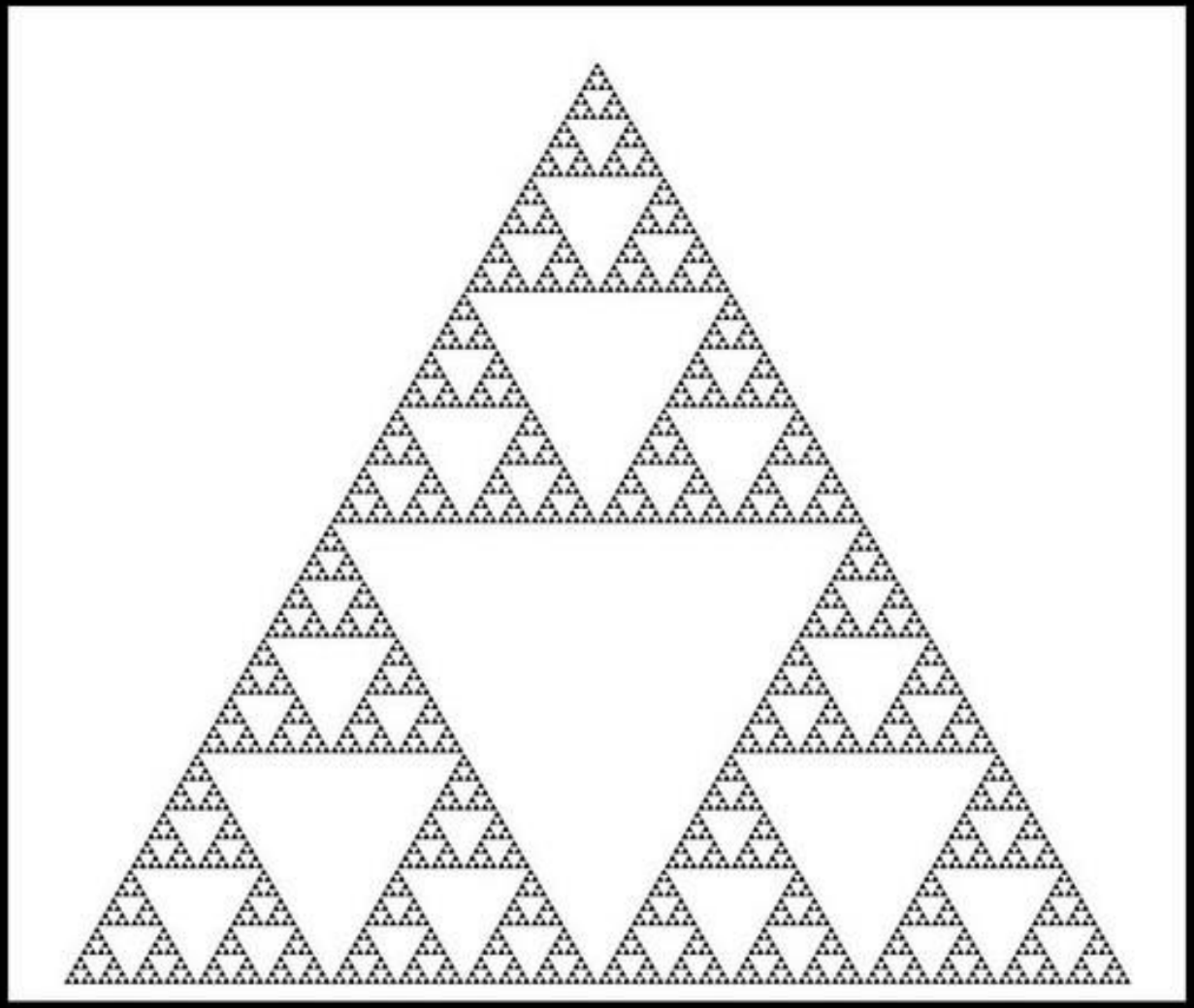


Pole trójkąta

- (to zielone)
- Zachęcam do policzenia ☺



- Co ciekawe P=0



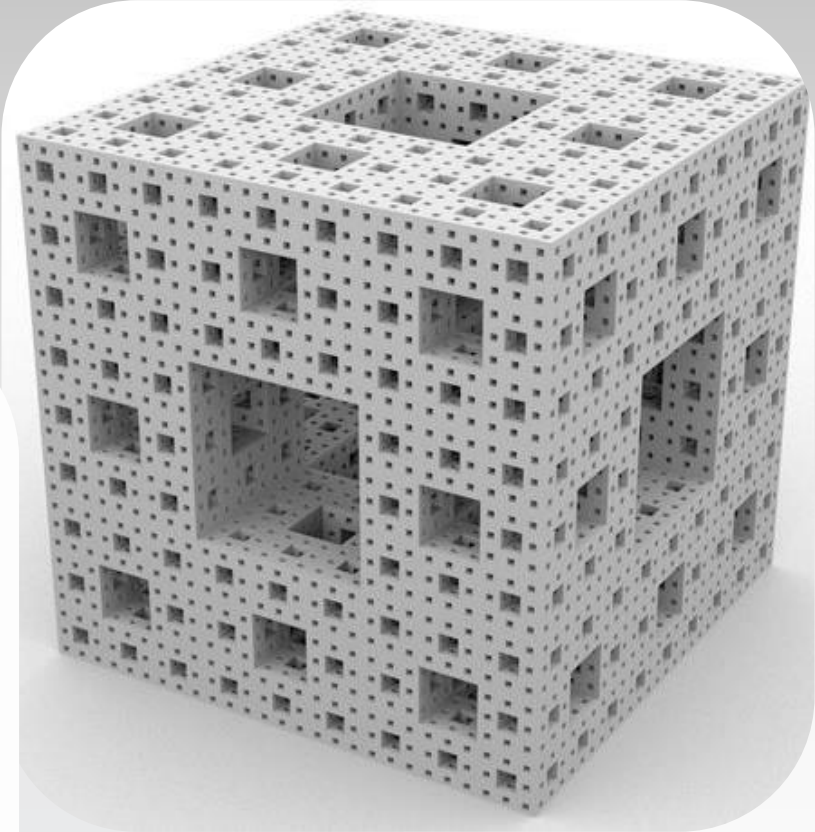
Trójkąt Sierpińskiego

Ile trójkątów widzisz?

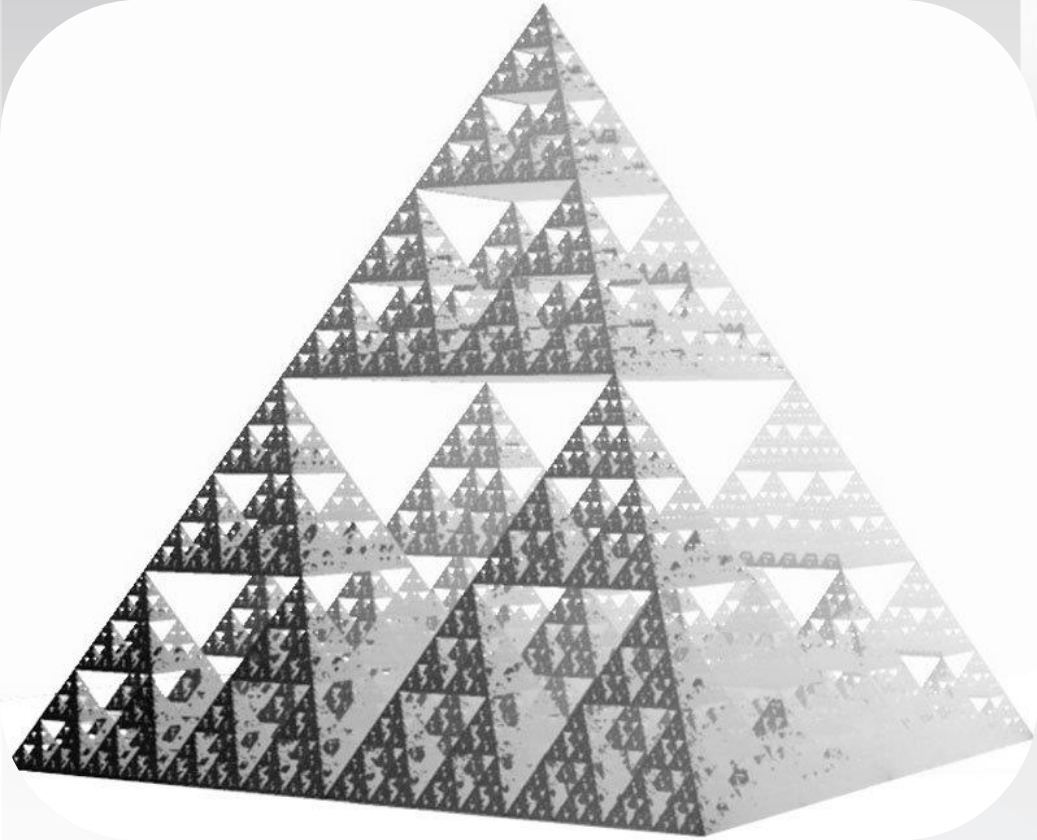
www.demotywatory.pl

3D

- Kostka/Gąbka Mengera



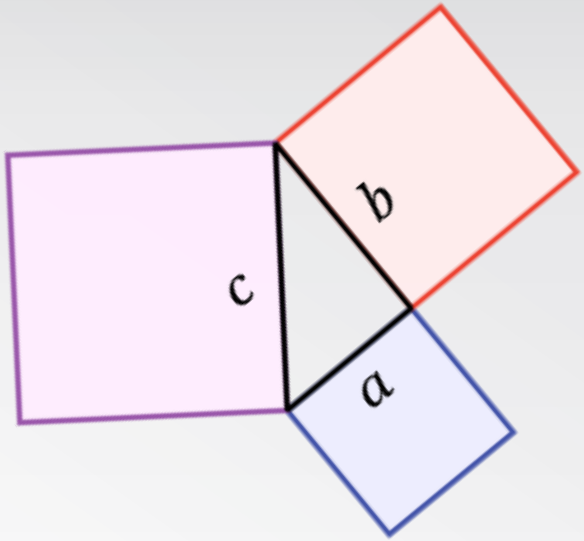
- Piramida Sierpińskiego



Objętość obu fraktali wynosi 0.

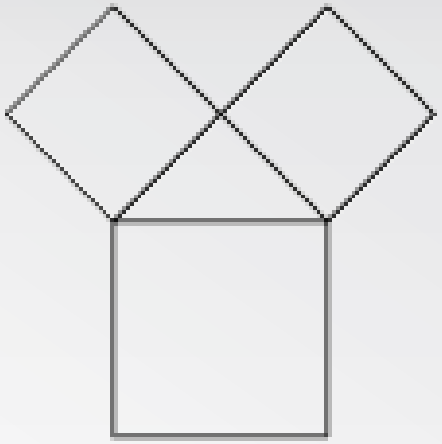
Drzewa pitagorejskie

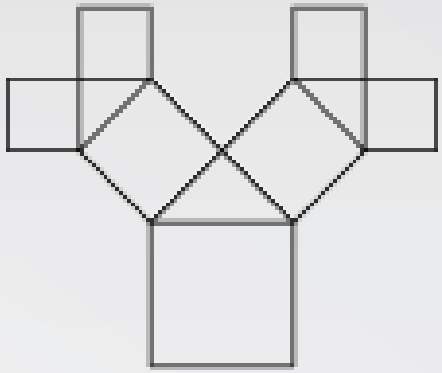
- Fraktal wziął nazwę od twierdzenia pitagorasa, ponieważ powstaje poprzez rysowanie dwóch kwadratów opartych na odpowiednich bokach trójkąta prostokątnego

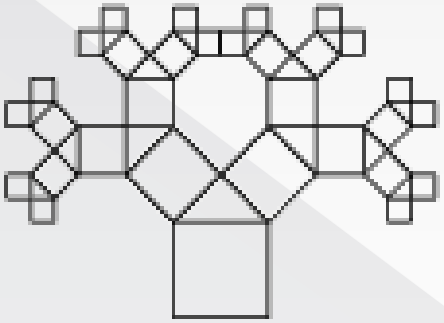


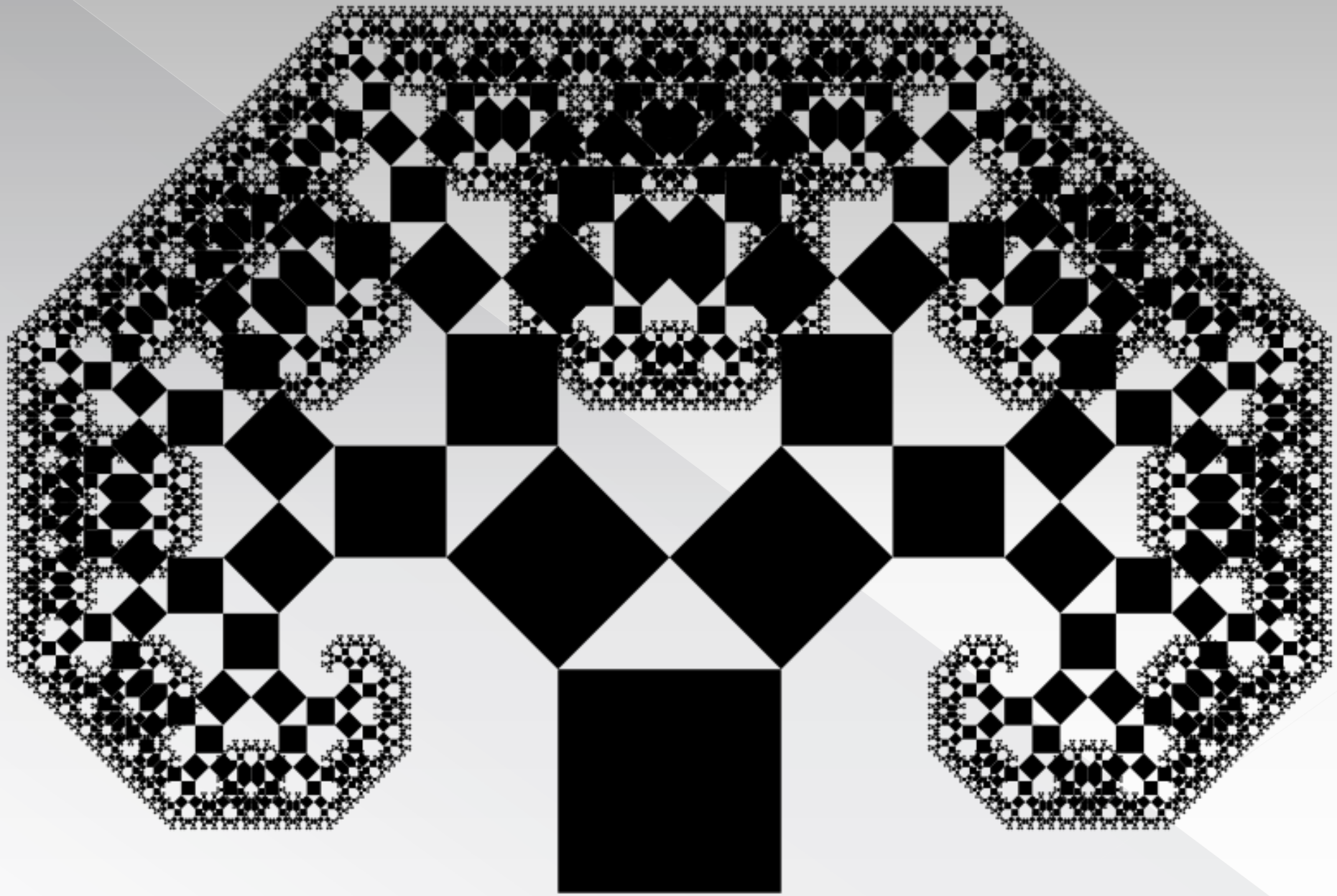
Powstawanie

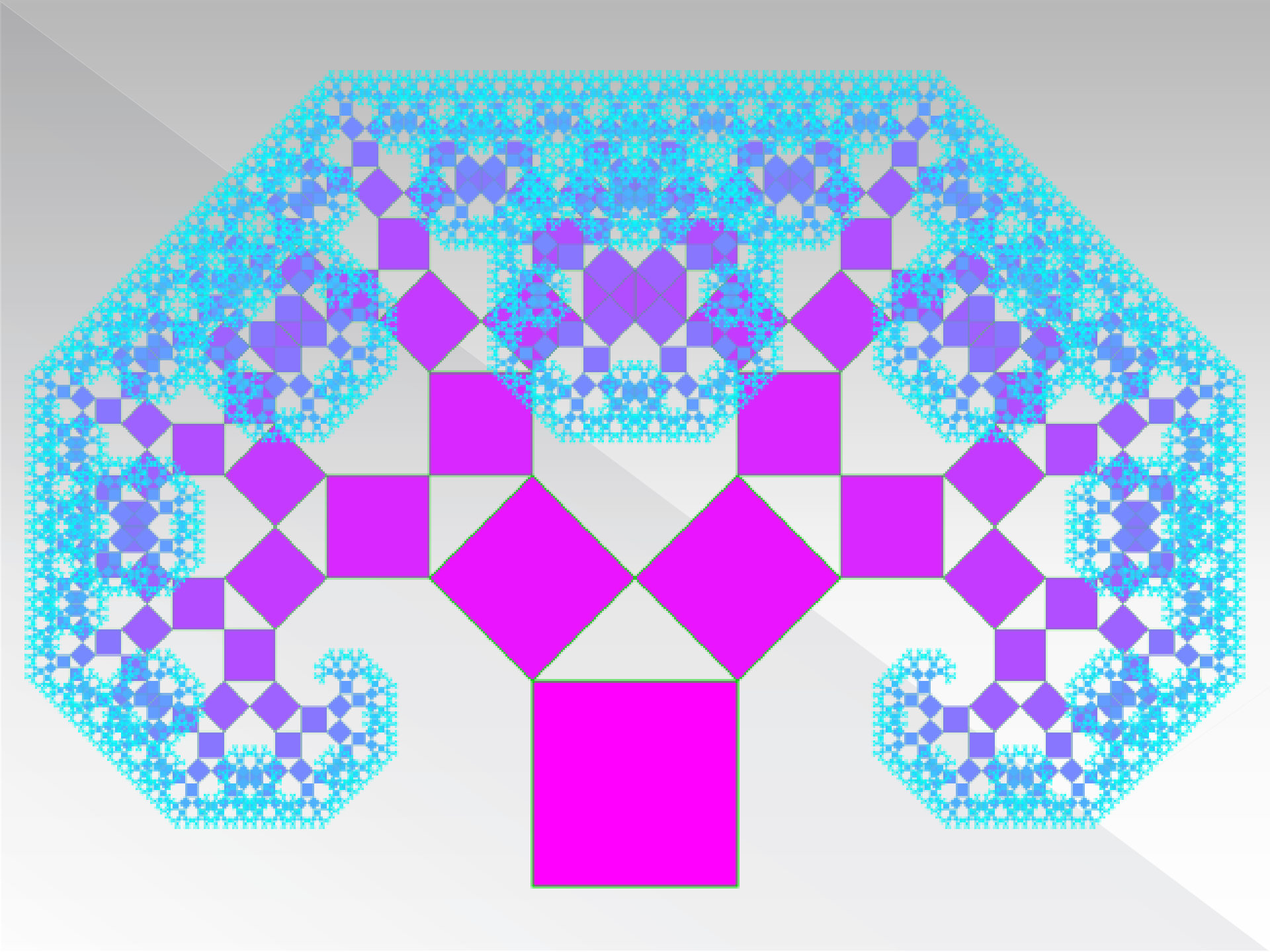
- Rysujemy dowolny kwadrat
- Dorysowujemy do niego trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna jest górną krawędzią tego kwadratu.
- Na przyprostokątnych trójkąta budujemy kolejne kwadraty.
- I tak dalej …



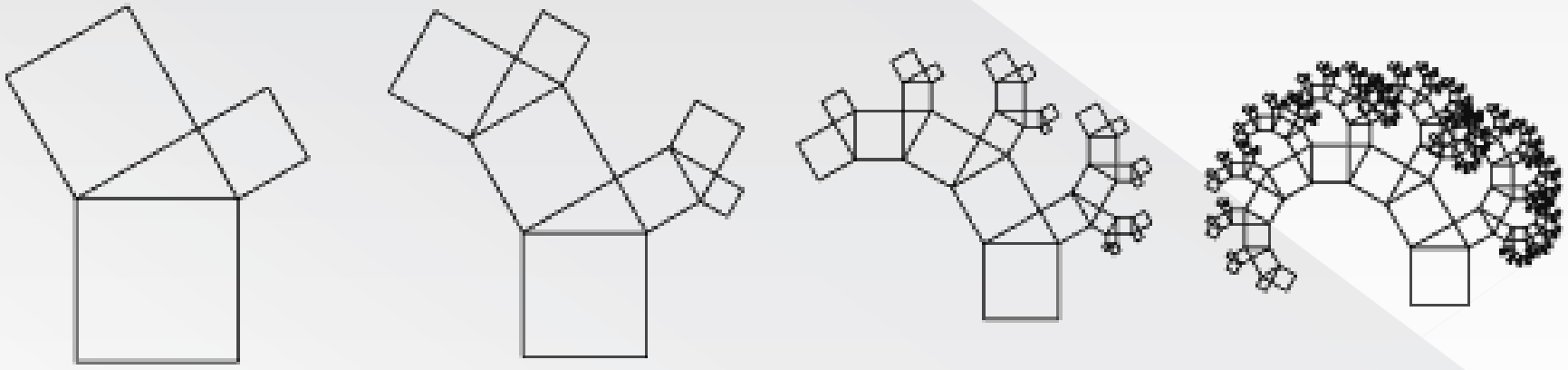


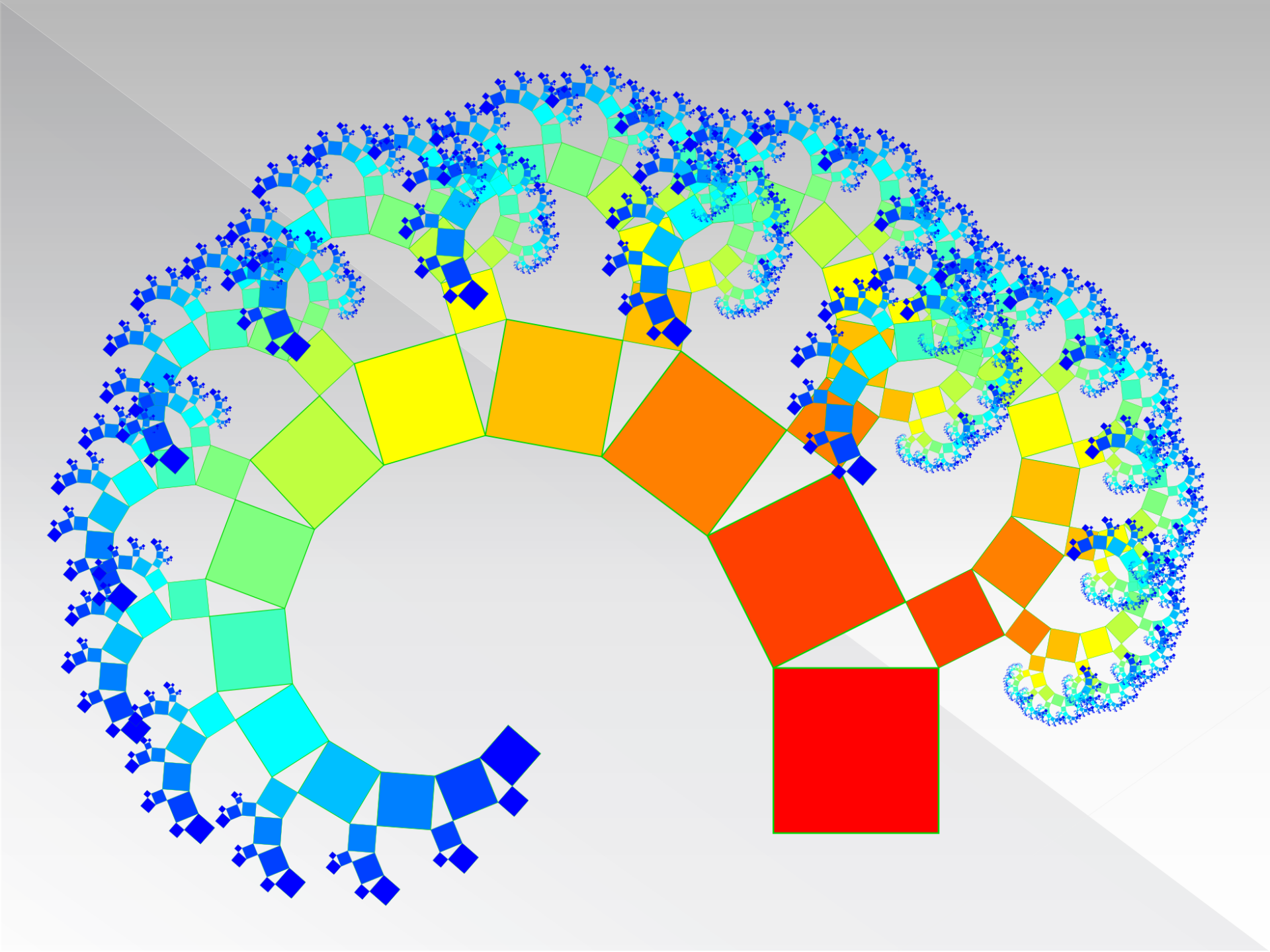


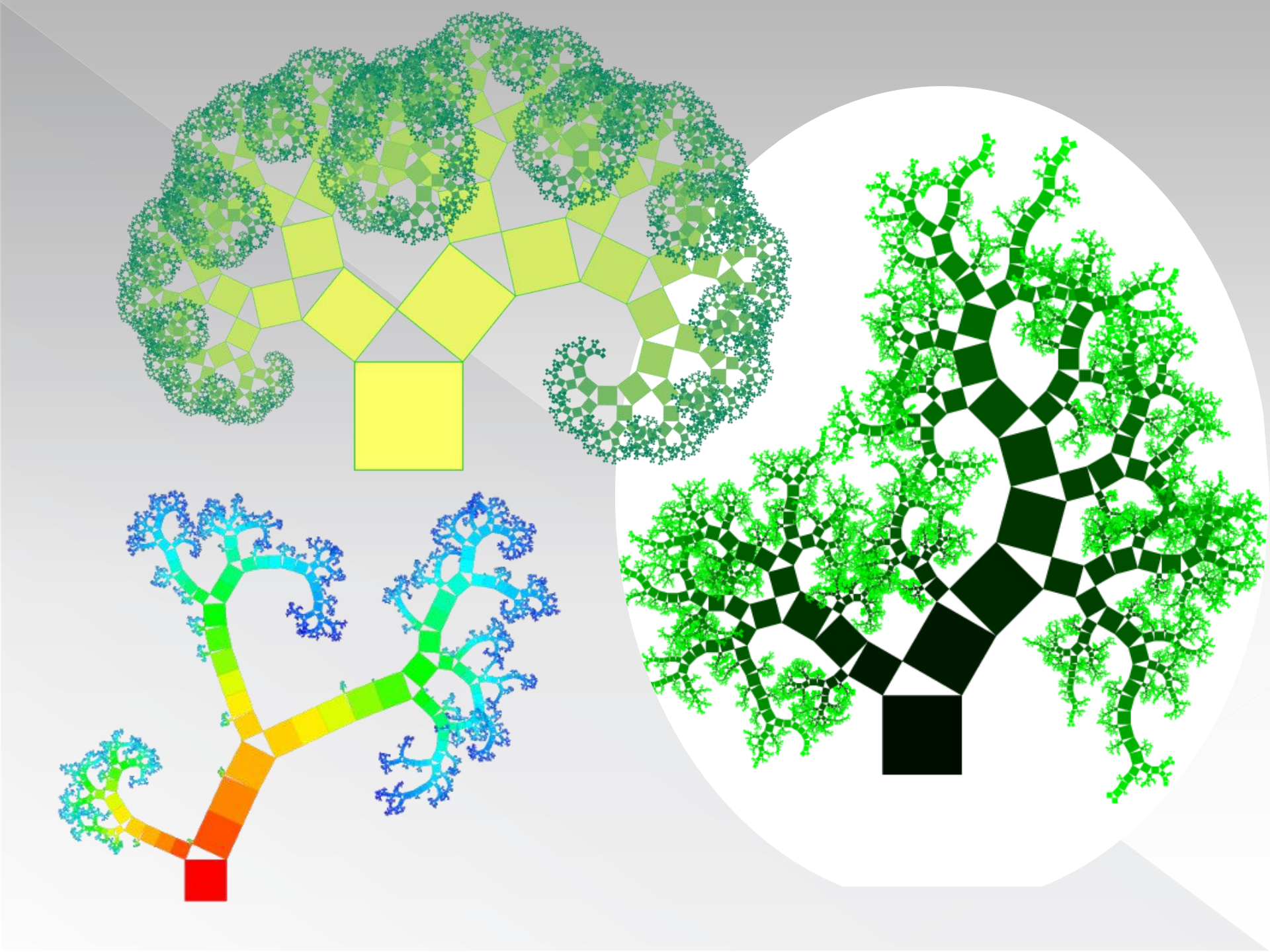


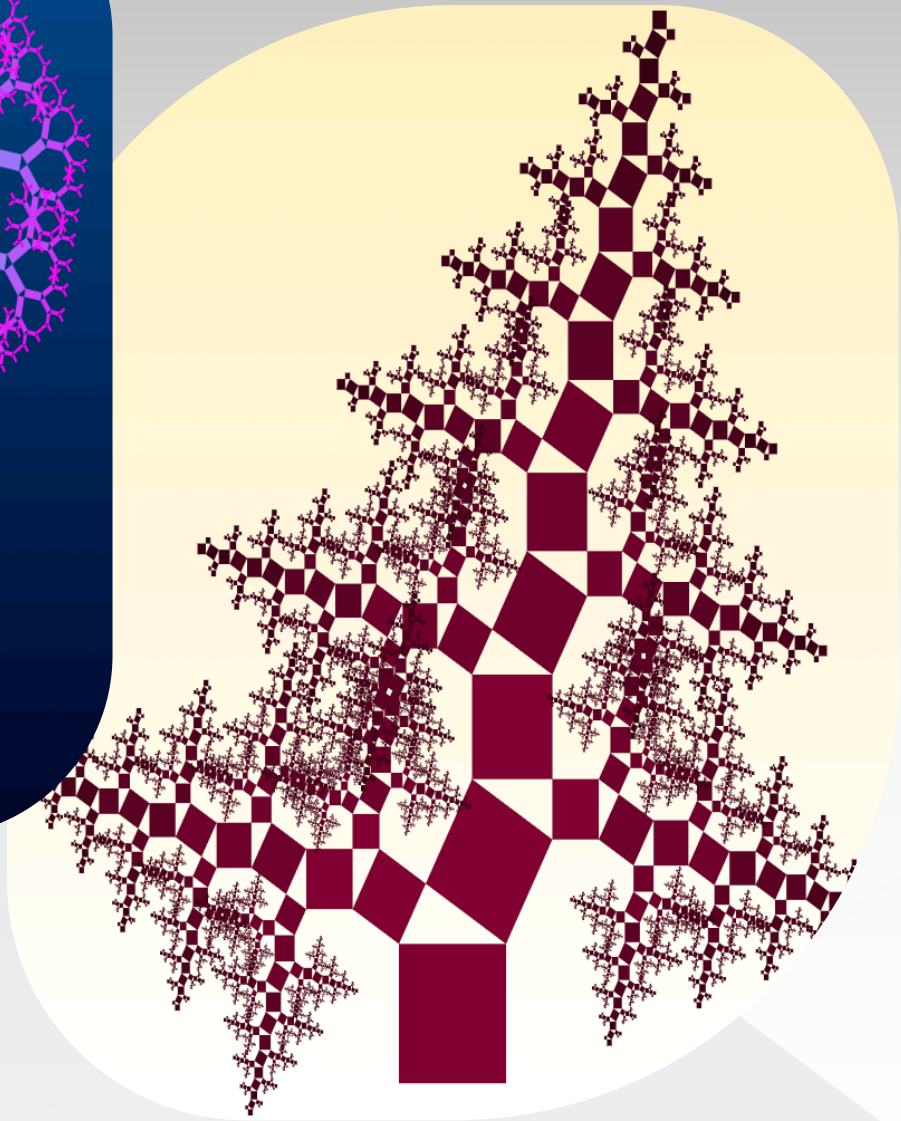


- Zmieniając długość przyprostokątnych, czy zamiast kwadratów rysować prostokąty można otrzymać najróżniejsze „drzewa”

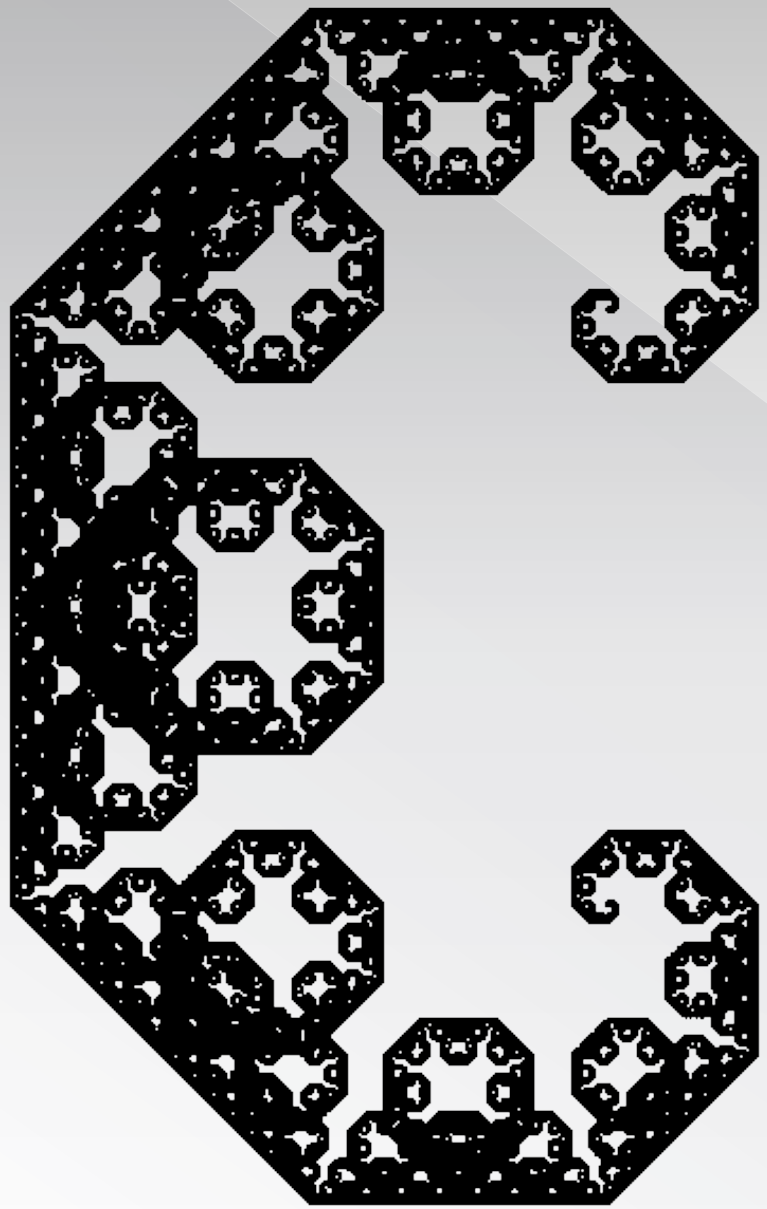








Krzywa Lévy'ego/Krzywa C



- „Korona" drzewa zbudowanego na trójkątach prostokątnych i równoramiennych

- Inną metodą tworzenia fraktali jest wykorzystywanie ciągów liczbowych, dzięki którym można otrzymać interesujące fraktale. Często są bardzo kolorowe, cechuje je nietrywialność struktury w każdej skali, ponadto struktura ta nie daje się łatwo opisać przy pomocy zwykłej geometrii.

- Generowane są komputerowo za pomocą IFS

Zbiór Mandelbrota

- **Zbiór Mandelbrota** (żuk Mandelbrota) - podzbiór płaszczyzny zespolonej, którego brzeg jest jednym ze sławniejszych fraktali. Nazwa tego obiektu została wprowadzona dla uhonorowania jego odkrywcy, francuskiego matematyka Benoit Mandelbrota.

Jak powstaje?

Dane jest równianie rekurencyjne:

$$z_0 = 0$$

$$z_{n+1} = {z_n}^2 + p$$

- gdzie *p* oznacza dowolną liczbę zespoloną.

Liczba zespolona- liczba postaci a+bi, gdzie i= $\sqrt{-1}$. Liczb tych nie da się zaznaczyć na osi liczbowej, więc zaznacza się je w układzie współrzędnych, gdzie osi x jest osią rzeczywistą (real), a oś y urojoną (imaginary). Liczba zespolona ma współrzędne (a, b), a jej moduł to odległość od środka układu współrzędnych (punktu (0, 0i))

$$z_0 = 0$$
$$z_{n+1} = z_n^{\,2} + p$$

Ze względu na nie do końca intuicyjny sposób, w jaki mnożą się liczby zespolone, równanie to zachowuje się czasem w sposób niebanalny. Przykładowo przyjmując p = 1+2i:

z_0 = 1+2i
z_1 = (1+2i)*(1+2i) + (1+2i) = (-3+4i) + (1+2i) = -2+6i
z_2 = (-2+6i)*(-2+6i) + (1+2i) = (-32-24i) + (1+2i) = -31-22i
z_3= (-31-22i)*(-31-22i) + (1+2i) = (-1166 + 1643i) + (1+2i) = -1165 + 1645i

Pytanie brzmi: jak będzie zachowywać się to równanie dla wybranej dowolnie wartości *p*, jeśli będziemy obliczać dowolnie „dalekie” człony równania? Okazuje się, że w pewnych przypadkach będzie dążyło do nieskończoności (plus lub minus) – tak zachowuje się na przykład podana wyżej liczba 1+2i – w innych zaś pozostanie ograniczone. Część rzeczywista i urojona są przy tym zawsze zgodne: albo nieograniczenie rosną/maleją, albo „osiadają” na jakiejś niewielkiej wartości. Zbiór Mandelbrota (M) jest zbiorem wszystkich liczb, dla których opisane równanie rekurencyjne *nie* prowadzi do nieskończoności.

$$\lim_{n\to\infty} z_n \neq \infty$$

Punkt p należy do zbioru Mandelbrota, gdy istnieje stała c większa od zera taka, że wyrazy ciągu zn są oddalone nie dalej niż o c od punktu 0 czyli |zn|≤c, zapisujemy:

$$\boldsymbol{p \in M \quad \Leftrightarrow \quad \exists c > 0 \;\; |z_c| \leq c}$$

Można udowodnić, że wystarczy przyjąć od początku, że stała c równa jest 2, czyli

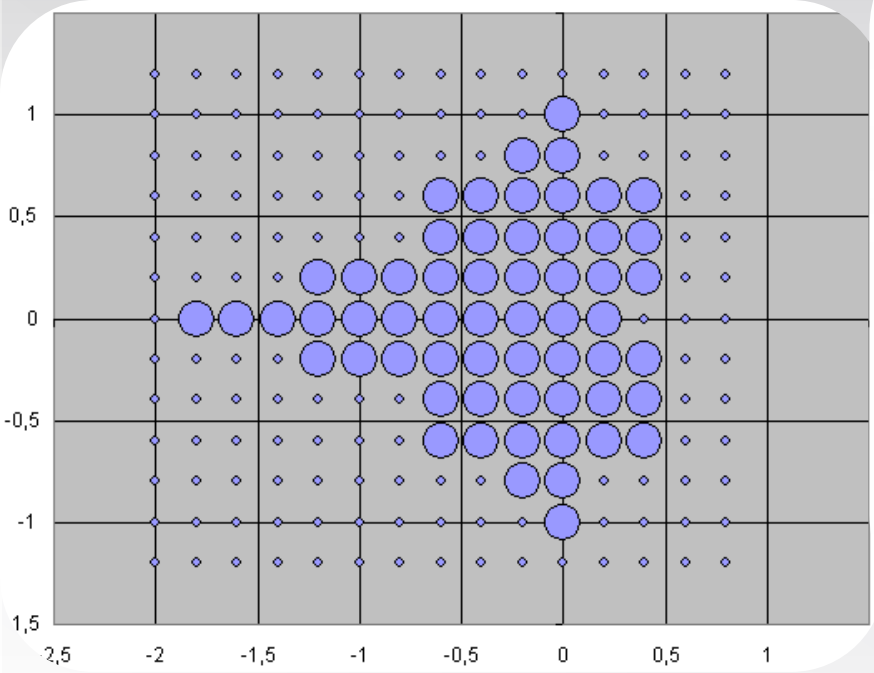
$$\boldsymbol{\forall n \in \infty \; |z_n| < 2}$$

Podsumowując:

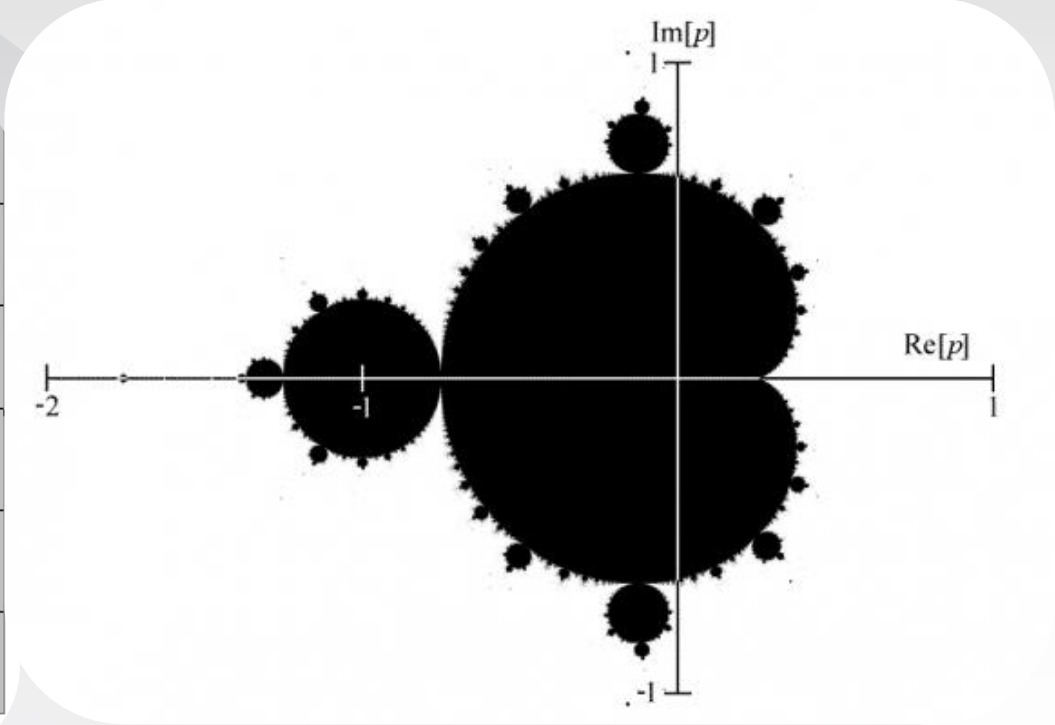
$$\boldsymbol{M = \{p\colon \forall n \in \infty \; |z_n| < 2\}}$$

Jak powstaje żuczek?

- Na płaszczyźnie urojonej zaznaczamy punkty p. Jeśli należą do zbioru Mandelbrota rysujemy duże kółko, jeżeli nie-małe. Dla 195 liczb wygląda to tak:

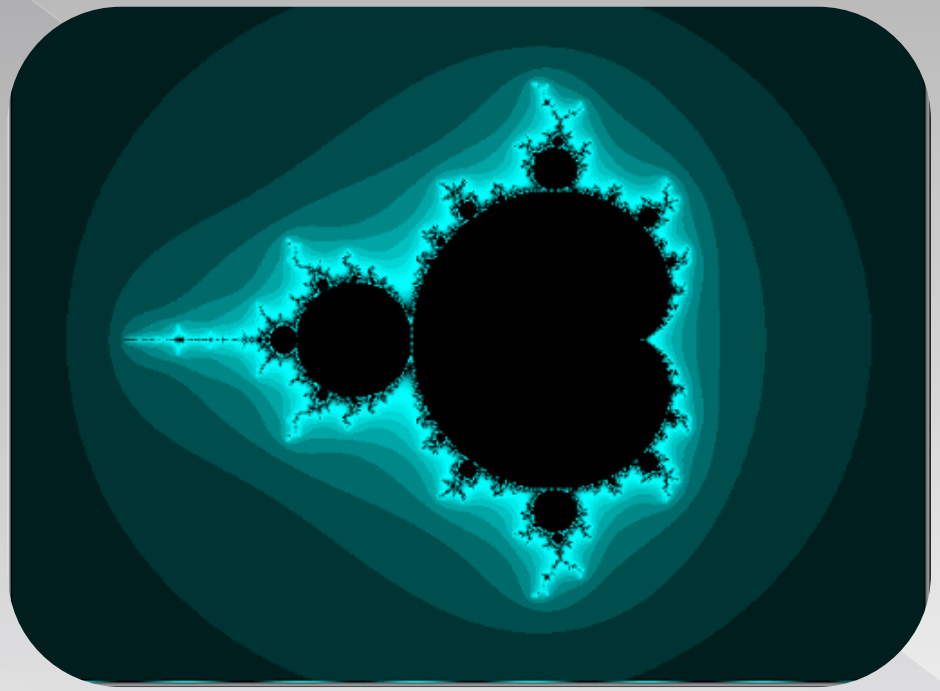


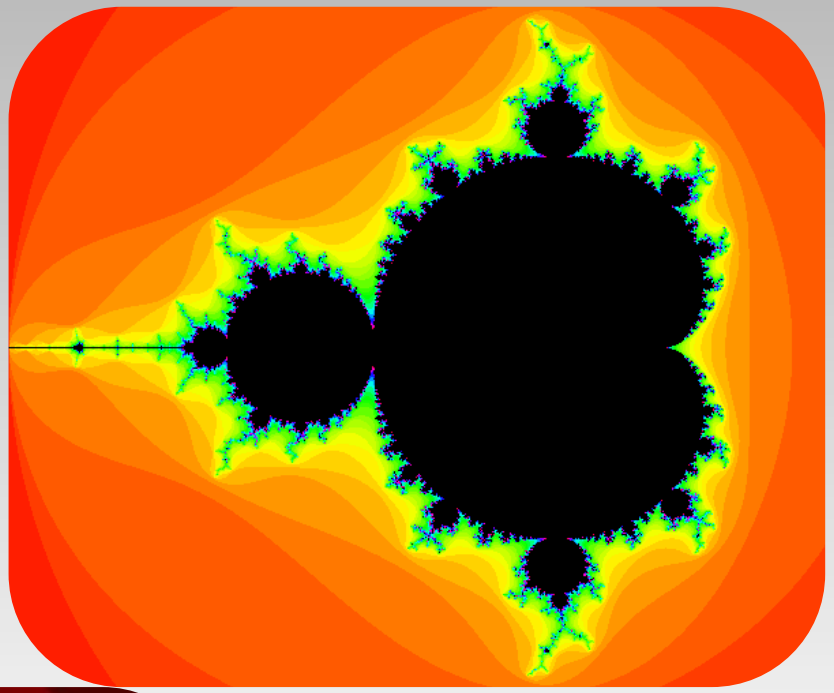
- A dla 250000 punktów tak (punkt $p \in M$ -czarny piksel, $p \notin M$ -biały):

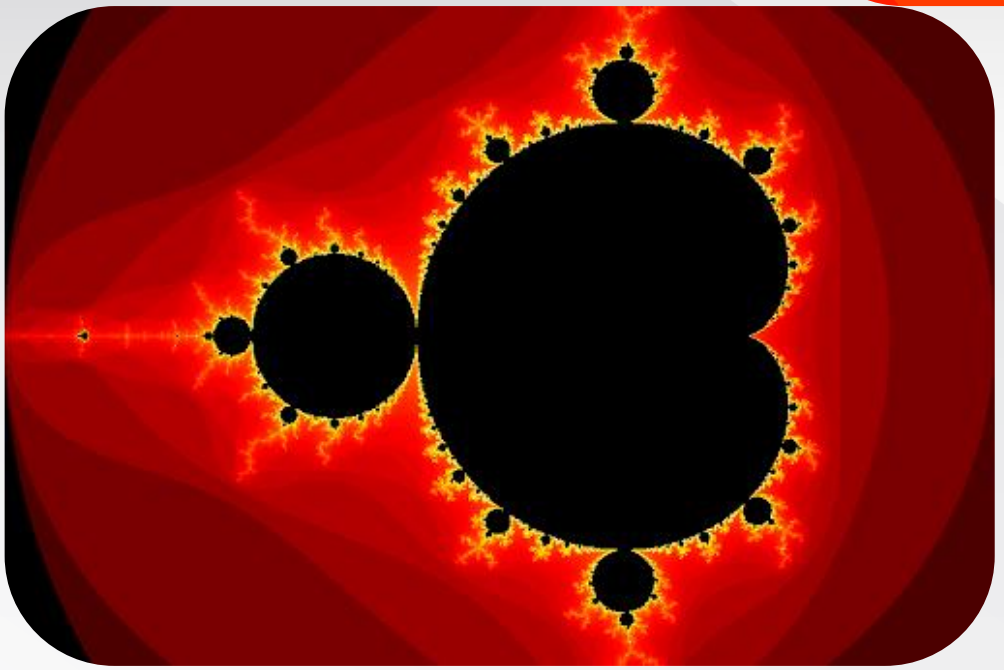


Kolorki

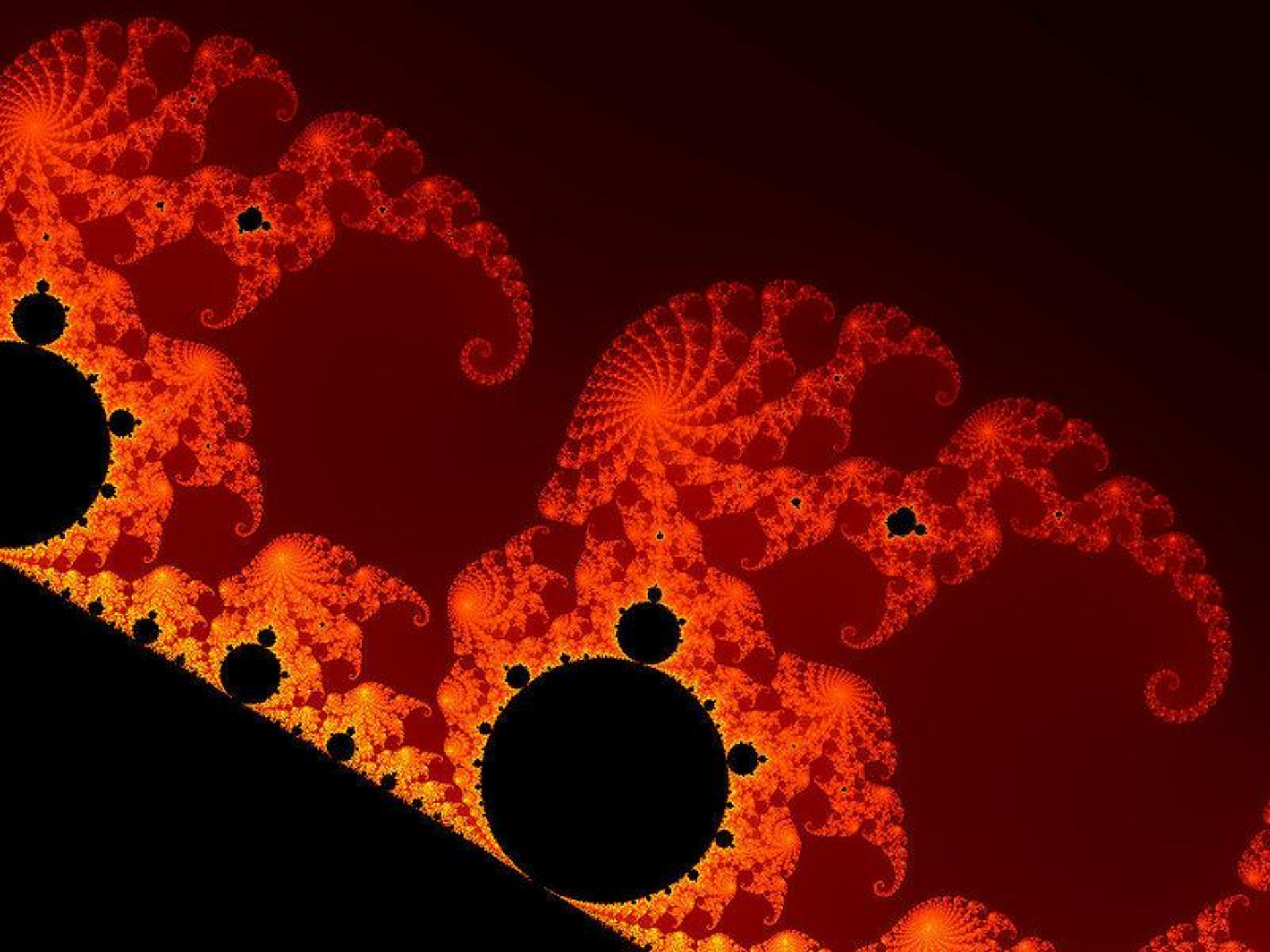
- Uzyskany tą metodą zbiór będzie monochromatyczny, gdy go pokolorujemy. Jeśli chcemy uzyskać bogatszą paletę kolorów, musimy ustalić reguły pośrednie opierające się na tempie uciekania punktów z okręgu o promieniu 2 wokół zera. Im szybciej punkt ucieka tym będzie np. ciemniejszy i na odwrót: im dłużej punkty z_n dla dużych n pozostają w granicach koła o promieniu 2, tym jaśniejszy jest punkt odpowiadający liczbie zespolonej p. Teraz wystarczy uzyskaną skalę przetłumaczyć na gradient kolorów i gotowe.

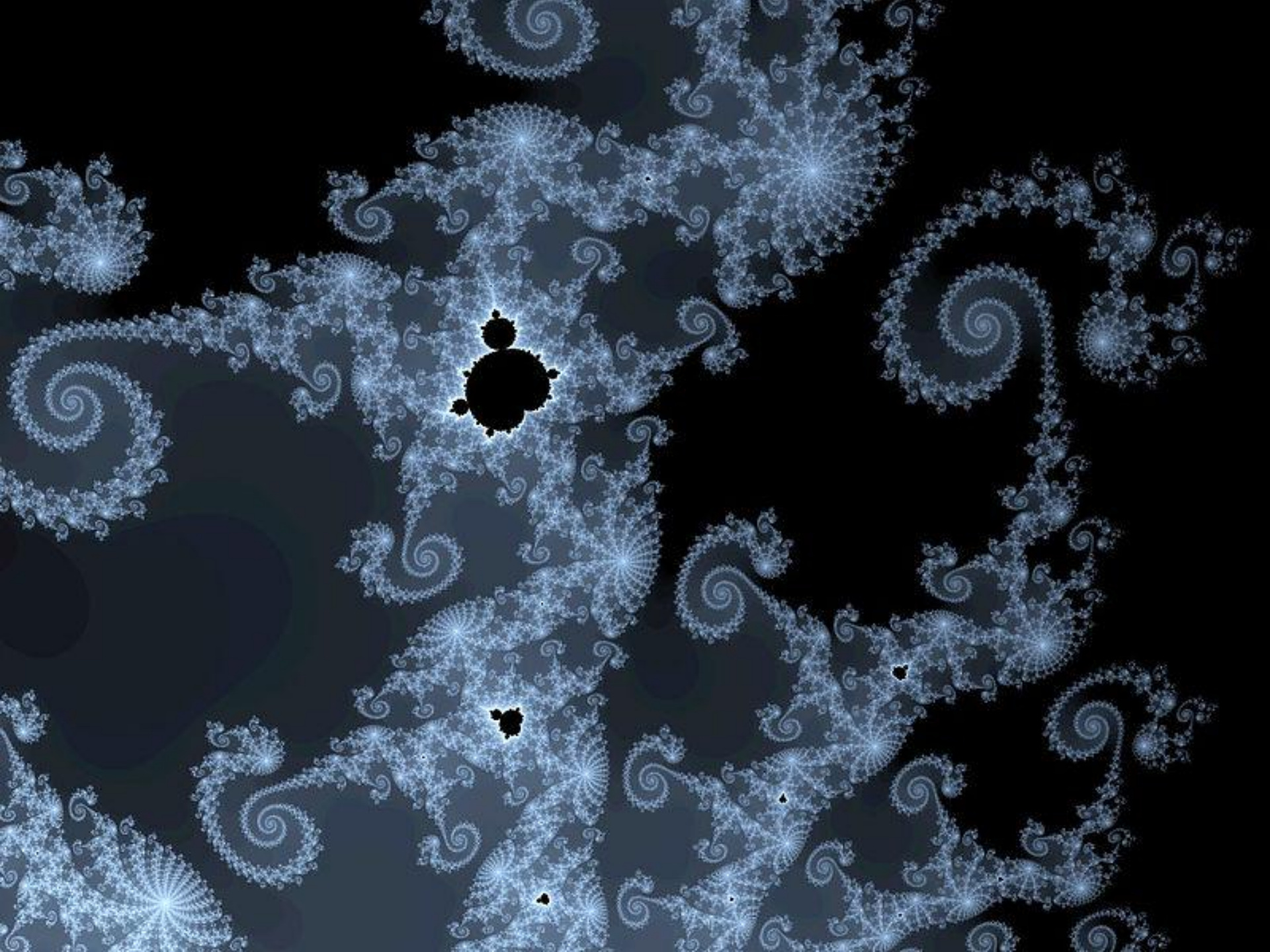






Złożoność krawędzi zbioru M





Płonący statek

- fraktal opisany po raz pierwszy przez Michaela Michelitscha i Otto E. Rösslera w 1992.

- Od zbioru Mandelbrota różni się tym, że ma we wzorze moduł

$$z_{n+1} = (|Re(z_n)| + i|Im(z_n)|)^2 + p$$

Zbiór Juliii

Zbiory Julii są fraktalami określonymi przez zależność rekurencyjną punktów płaszczyzny zespolonej. Równanie startuje od dowolnego punktu z_0 (w zbiorze Mandelbrota z_0=0)i stałej *c*.

$$z_0 = p$$

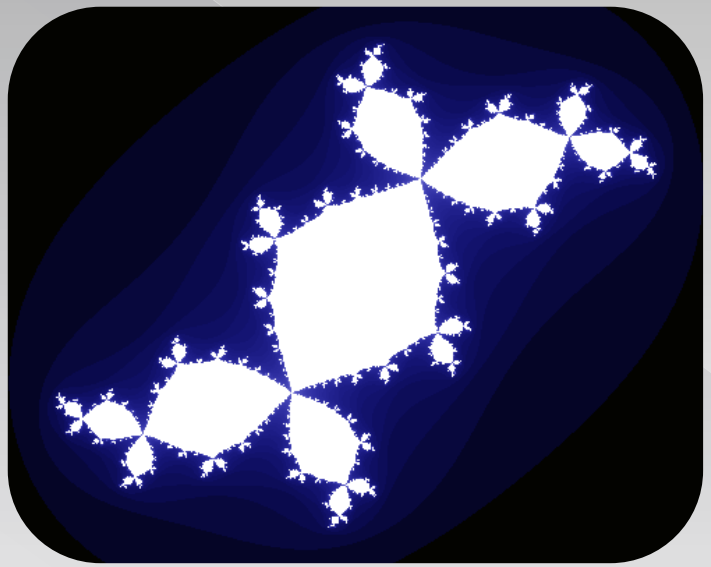
$$z_{n+1} := z_n^2 + c$$

Julia zauważył, iż dla pewnych punktów *p* ciąg ten jest ograniczony - nie dąży do nieskończoności, a dla innych nieograniczony.

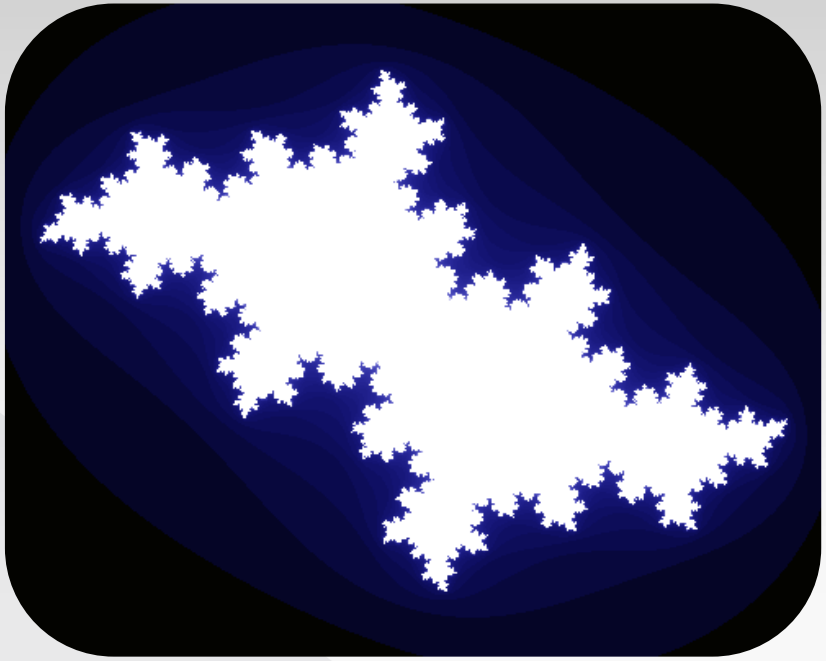
Zbiór Julii definiujemy jako zbiór liczb zespolonych *p* takich, że zdefiniowany powyżej ciąg nie dąży do nieskończoności.

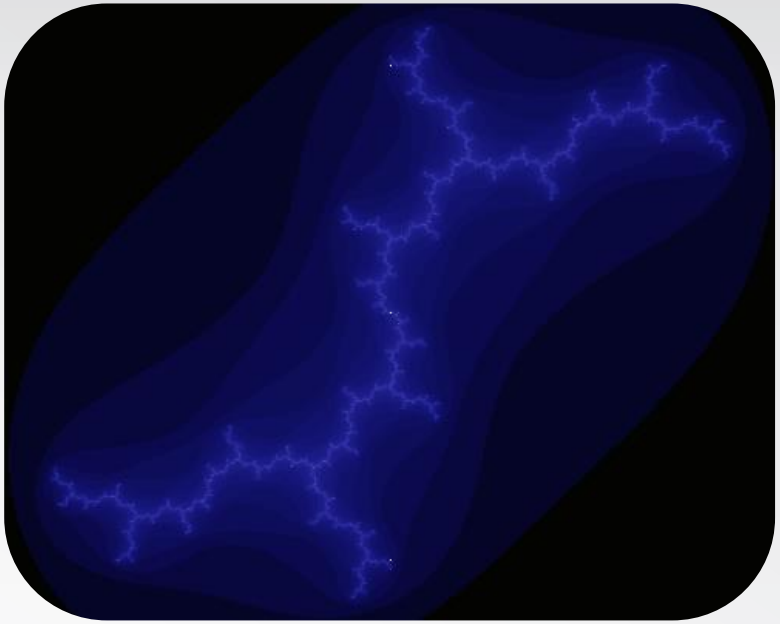
Zbiory Julii w zależności od parametru c

the Douady's Rabbit Fractal,
c = -0.123 + 0.745i

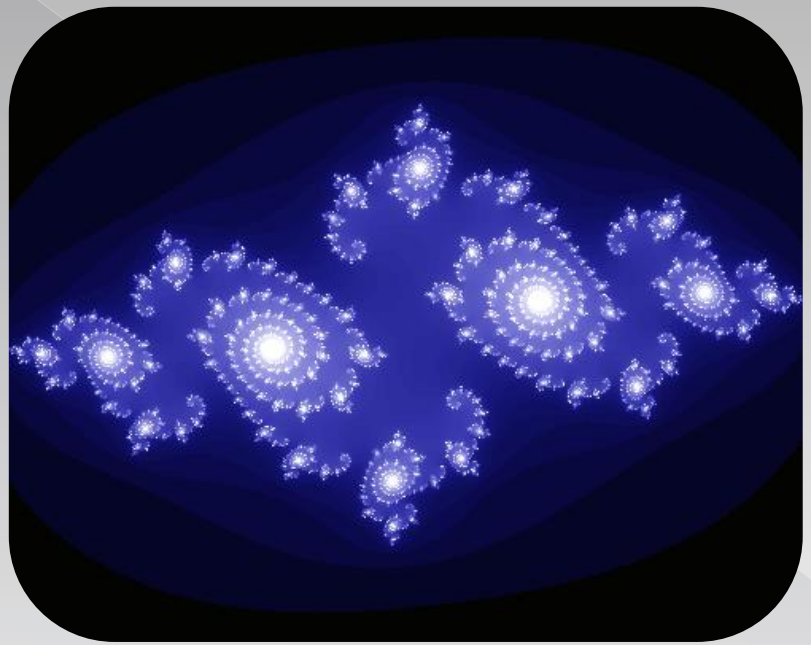


the Siegel Disk Fractal,
c = -0.390541 - 0.586788i



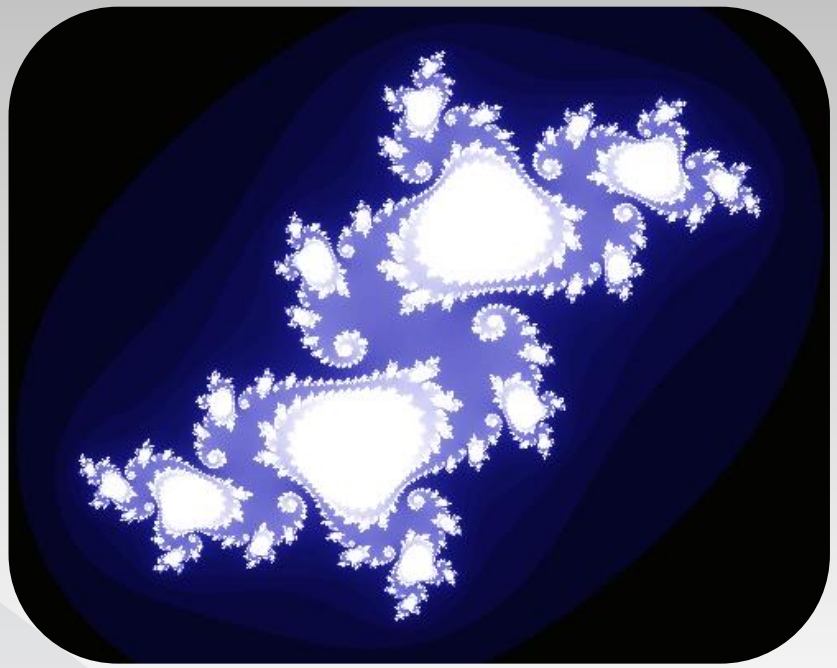


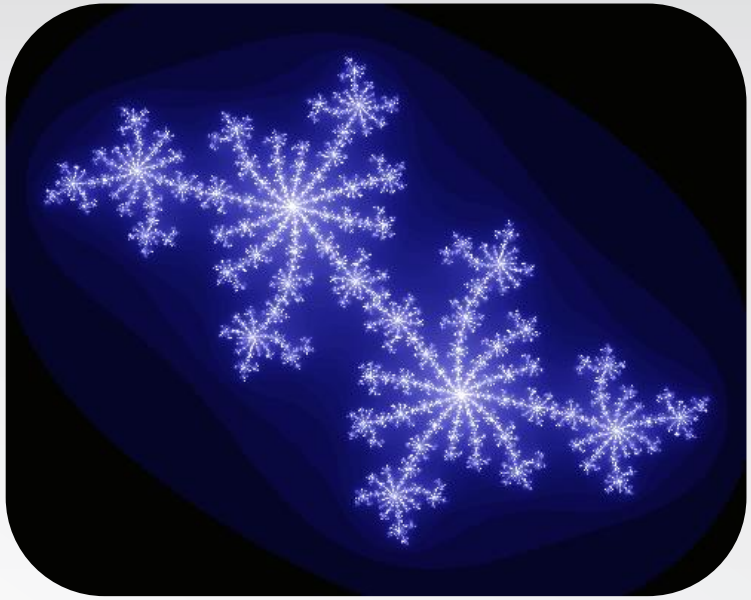
the Dendrite Fractal ,
wartość parametru *c = i*



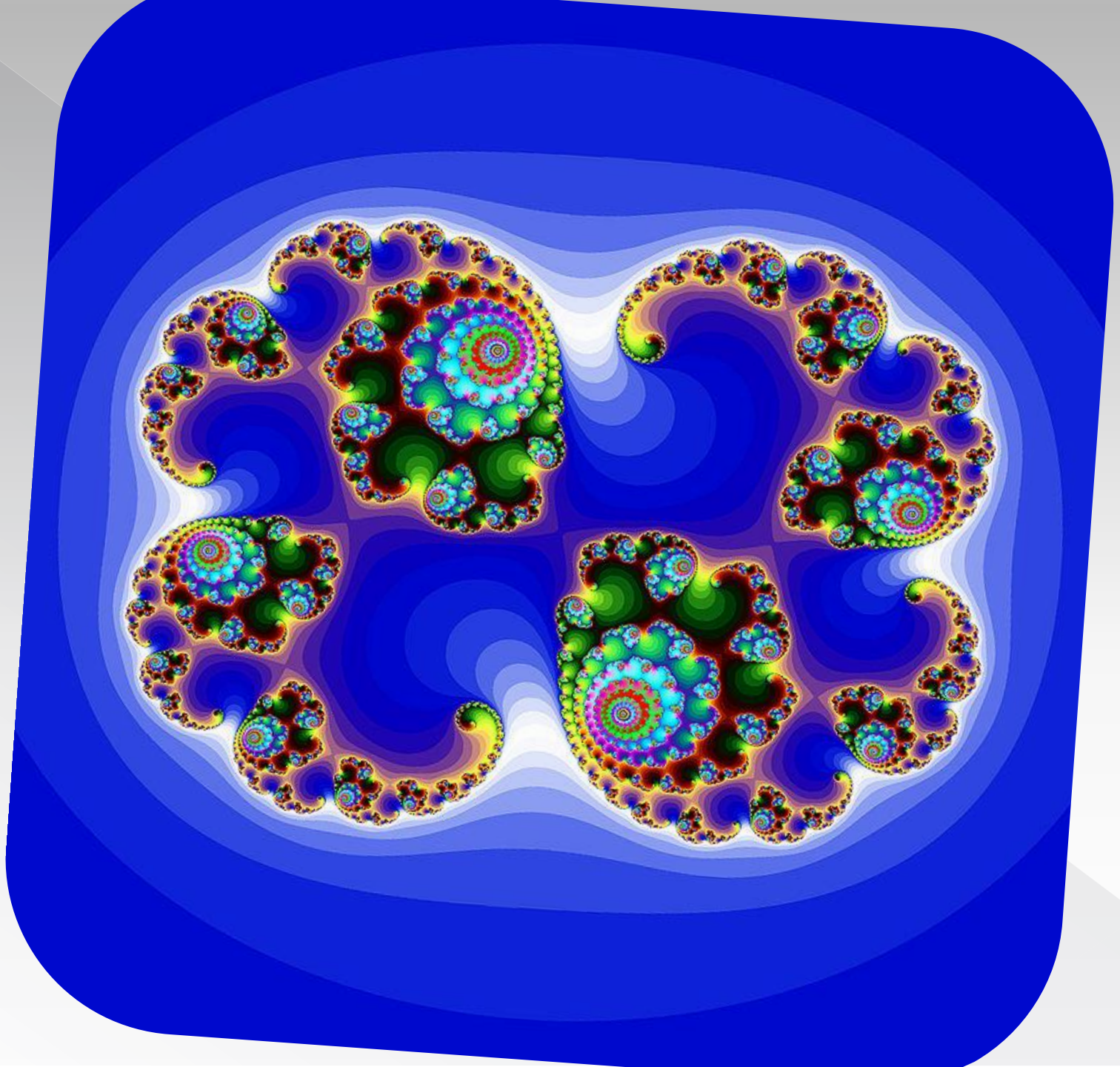
c= -0,75+0,19i

C=-0,08+0,652i



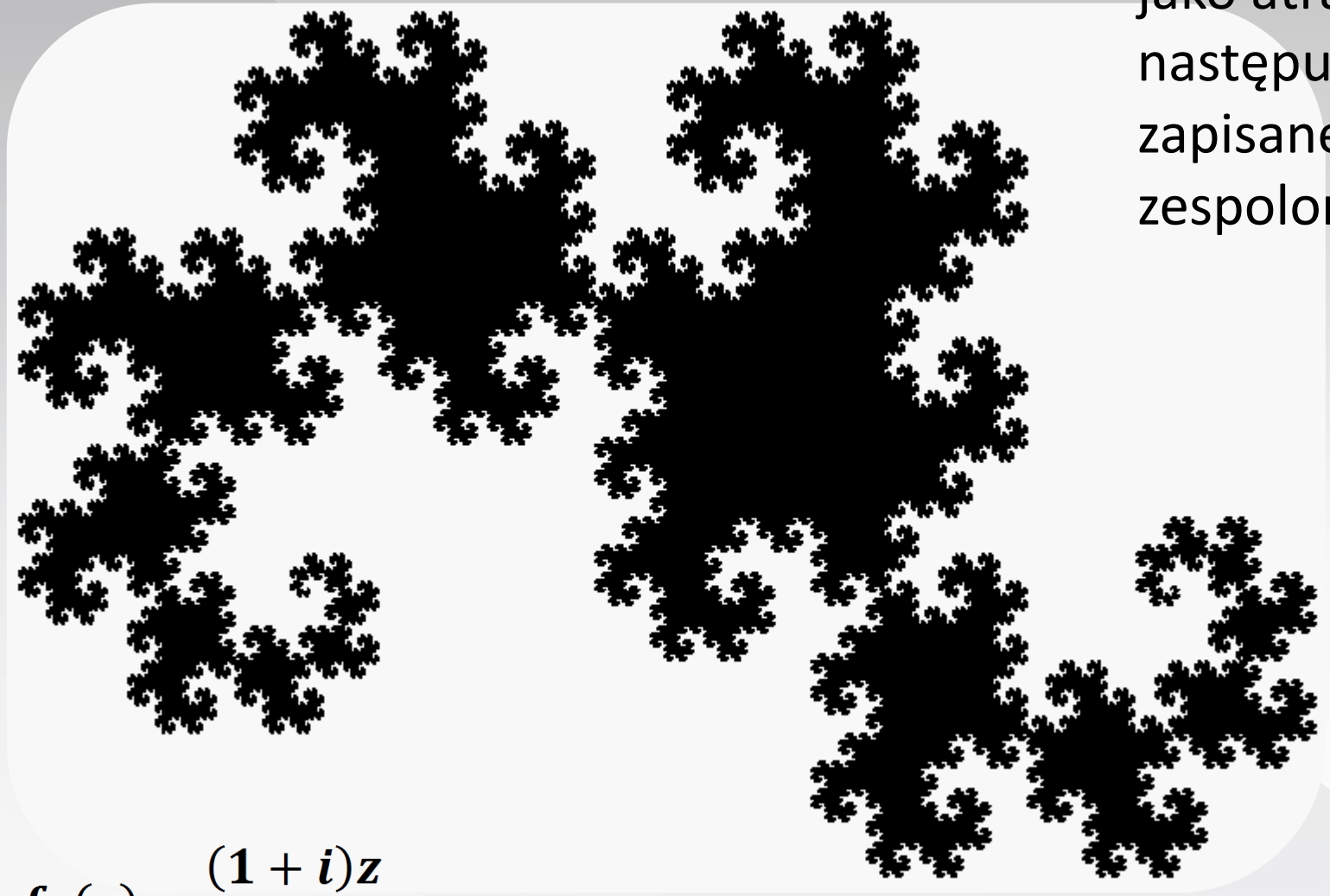


c= -0,3 -0,666i



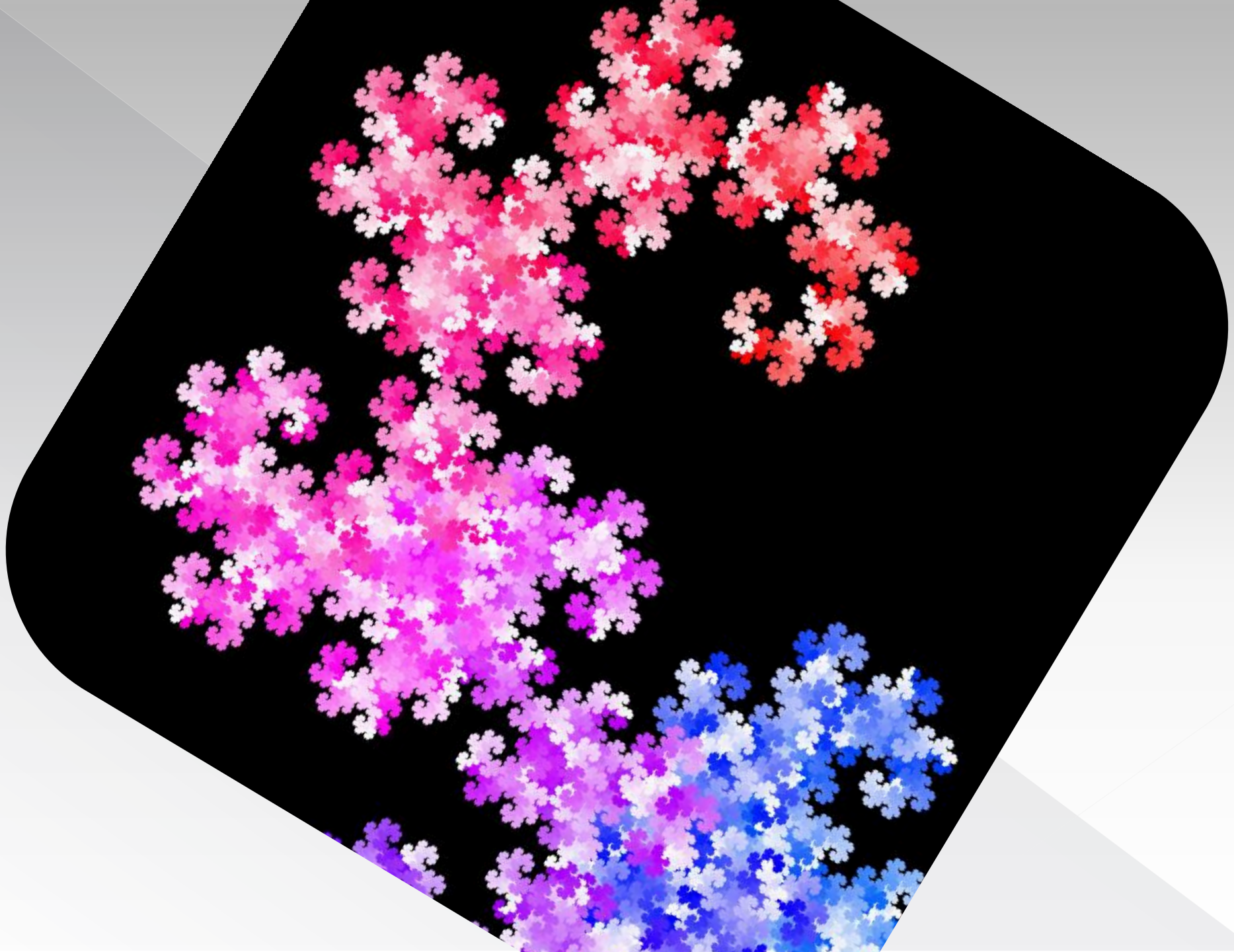
Smok Heighwaya

- Zdefiniowany jako atraktor następującego IFS zapisanego w notacji zespolonej:

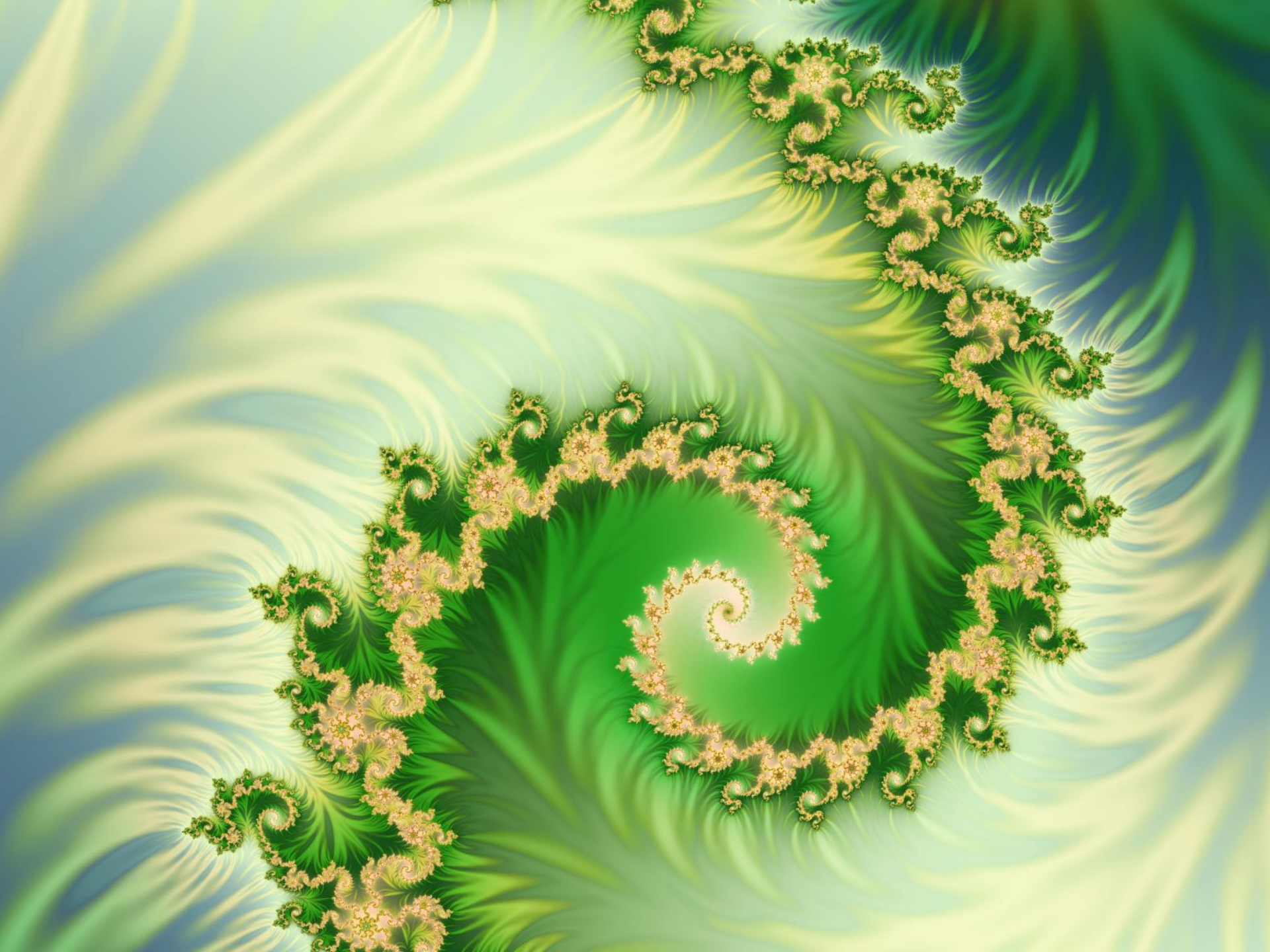


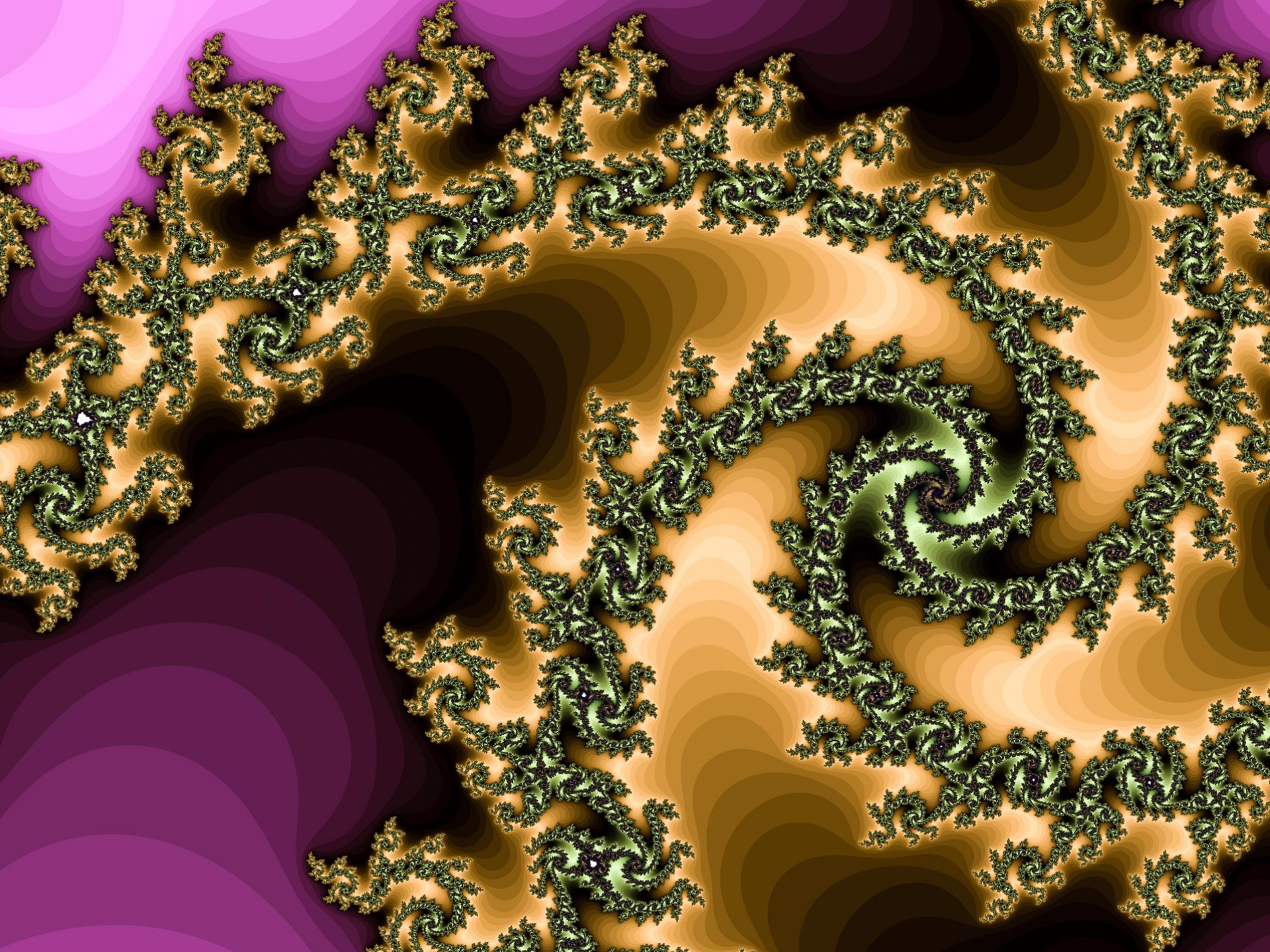
$$f_1(z) = \frac{(1+i)z}{2}$$

$$f_2(z) = 1 - \frac{(1-i)z}{2}$$



Fraktale generowane komputerowo





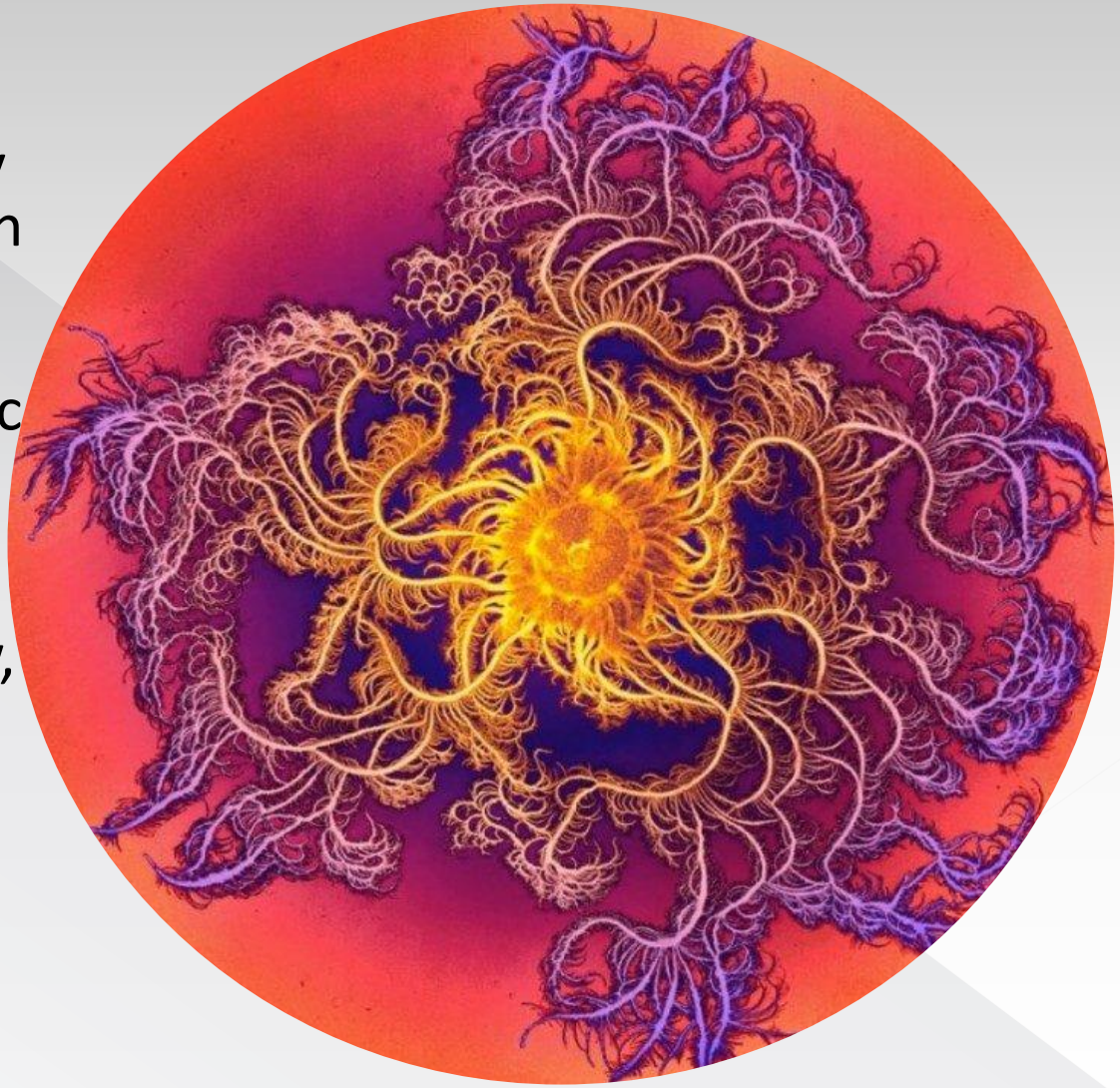
Fraktale dookoła nas

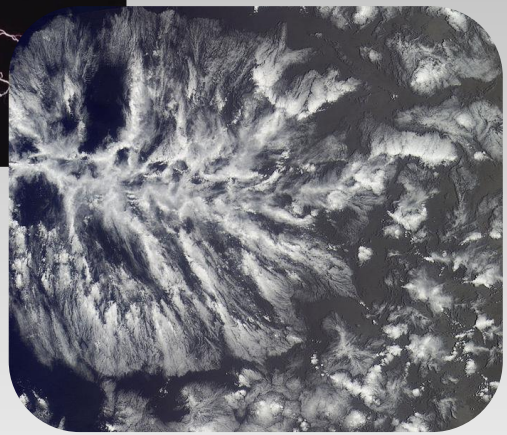
W przyrodzie

- Okazuje się, że wokół nas znajduje się mnóstwo fraktali. Dobrym przykładem jest kalafior. Każda z jego różyczek wygląda jak miniaturowe warzywo, które jest złożone z kolejnych mniejszych różyczek.

- Drzewa. Zauważmy, że kolejne przyrosty są powtórzeniem rozgałęzień tworzących się w latach ubiegłych.

- Bakterie tworzące fraktalne wzory na szalce Petriego
- Badania wykazały, że bakterie rozwijają się w jednym kierunku, ale gdy duża liczba rozrastających się komórek napiera na siebie, dochodzi do zakłóceń. Komórki dzieląc się dalej, powielają schemat, co prowadzi do powstawania samopodobnych wzorów, czyli fraktali.



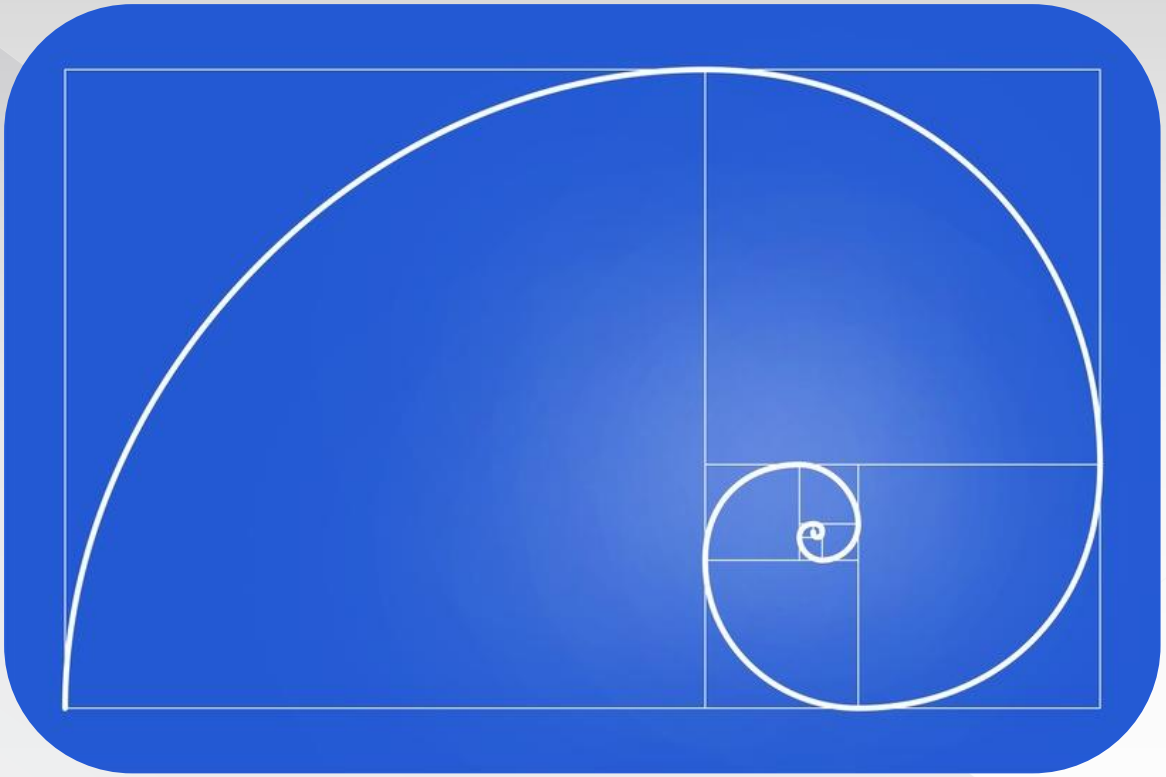


- Chmury,
- Błyskawice,
- Górskie granie,
- Układ linii brzegowych, itd

Ciąg Fibonacciego

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, …

Niektórzy traktują ciąg Fibonacciego jak fraktal, w którym każdy element jest podobny do poprzedniego o fi Φ



- $\Phi \approx 1{,}618$

Gdzie jeszcze znajdujemy fraktale?

- Niektórzy starają się też doszukiwać fraktalnych kształtów w ludzkim organizmie (aktywność mózgu lub naczynia w płucach) i wykorzystać to w medycynie, np. w badaniach rytmu bicia serca. Tam, gdzie struktura uderzeń serca miała postać dobrze rozwiniętej fraktalności - serce było zwykle zdrowe. A w przypadku chorób serca - struktura uderzeń była zredukowana
- Możliwe, że naturę fraktalną mają ruchy Browna
- Wg niektórych teorii klimat miałby się zachowywać podobnie zarówno w wielkich tysiąckilometrowych skalach, jak i na poziomie lokalnym, więc można by przewidzieć pogodę (jest to jeszcze w trakcie badań)
- w ekonomii do analizy danych finansowych; notowania giełdowe

Zastosowania

W informatyce:

- Zastosowania w analizie tekstur, dekompozycja obrazu na podstawie lokalnego wymiaru fraktalnego, Kompresja fraktalna obrazu (znajdowanie IFS dla zadanego prototypu)
- Grafika komputerowa - geometrię fraktalną wykorzystano do generowania krajobrazów i roślin w filmach i grach
- Obecnie prawie każdy telefon komórkowy korzysta z wbudowanej anteny fraktalnej.

- muzyka – wykorzystuje się fraktale do komponowania nowych utworów, które są milsze dla ucha. Niektóre dzieła Bacha, Mozarta czy Beetovena też mają budowę fraktali.

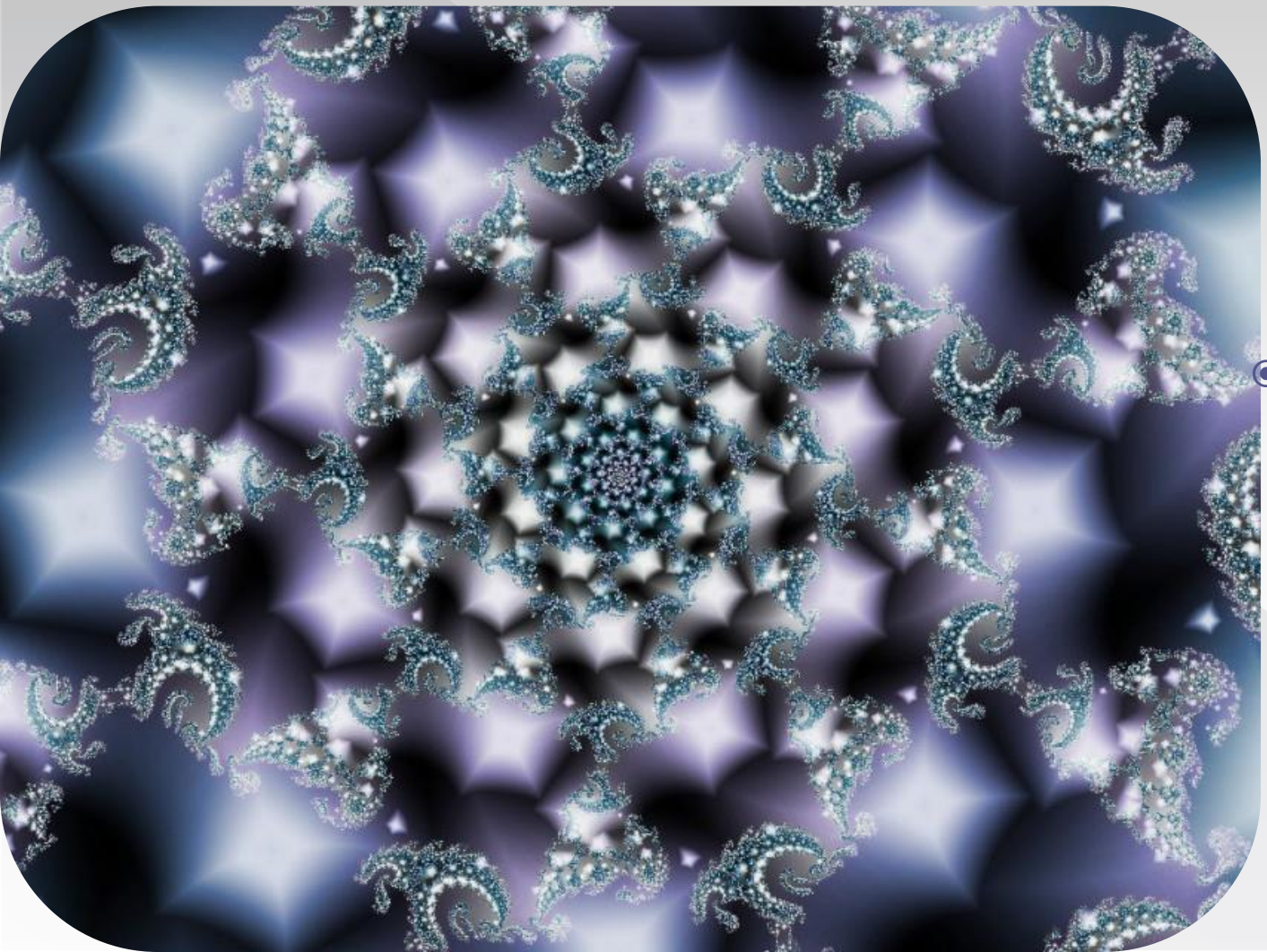
- jako elementy ozdobne na plakatach i koszulkach

- biżuteria

- architektura– niektóre konstrukcje budowlane tworzone przez człowieka mają strukturę fraktalną;

Odwieczny urok

- Fraktale mają jeszcze jedną intrygującą właściwość – są po prostu ładne. Podobają nam się zarówno w postaci generowanych przez komputer wzorków, jak i naturalnych tworów czy zjawisk.



- Dlaczego to, co fraktalne, tak nam się podoba? Żyjemy w złożonym środowisku, obfitującym w naturalne fraktale i takie widoki są dla nas znajome.

Dziękuję za uwagę ☺

Ewa Bambynek